APPROXIMIERBARE OPERATOREN IN NORMIERTEN UND LOKALKONVEXEN RÄUMEN

INAUGURALDISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

JÜRGEN APPELL

aus Berlin

1978

APPROXIMIERBARE OPERATOREN IN NORMIERTEN UND LOKALKONVEXEN RÄUMEN

INAUGURALDISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

JÜRGEN APPELL

aus Berlin

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referenten: Professor Dr. Helmut Pachale

Professor Dr. Ilppo Simo Louhivaara

Professor Dr. Gerd Wittstock

Tag der mündlichen Prüfung: 27. 11. 1978

Gesamtherstellung: **aku** - Fotodruck GmbH, 8600 Bamberg

INHALTSVERZEICHNIS

§ 0. Einleitung 4

§ 1. Abbildungsgradtheorie für nichtkompakte Operatoren 9

§ 2. Approximierbare Operatoren in normierten Räumen 15

§ 3. Ein Abbildungsgrad für approximierbare Operatoren 23

§ 4. Eigenschaften des Abbildungsgrades 35

§ 5. Die minimale Verschiebung 45

§ 6. Approximierbare Operatoren in lokalkonvexen Räumen 51

§ 7. Anwendung auf ein Anfangswertproblem 61

Literaturverzeichnis 72

Lebenslauf 79

§ 0. EINLEITUNG

Die klassischen Fixpunktprinzipien von Banach und Schauder sind auf verschiedene allgemeinere Operatorenklassen übertragen worden. Hierbei spielen für die Abbildungsgrad- und Fixpunkttheorie wie auch in gewissem Maße für Anwendungen (vgl. z. B. [2],[56],[44],[46],[47]) die sogenannten kondensierenden Operatoren eine große Rolle, deren Definition eng mit dem Begriff des Nichtkompaktheitsmaßes einer Menge verknüpft ist: Ist M eine nichtleere Teilmenge eines Banachraums E, so wird die Zahl

(1) $\chi(M) = \inf\{\varepsilon \mid \varepsilon>0$, es existiert ein endliches ε-Netz von M in E$\}$

das Hausdorffsche Nichtkompaktheitsmaß und die Zahl

(2) $\gamma(M) = \inf\{\delta \mid \delta>0$, es existiert eine endliche Überdeckung von M mit Mengen vom Durchmesser $<\delta\}$

das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß der Menge M genannt. Es gilt dann $\chi(M) < \infty$ und $\gamma(M) < \infty$ genau für beschränkte und $\chi(M) = 0$ und $\gamma(M) = 0$ genau für totalbeschränkte Mengen M.

Ist M eine Teilmenge von E und $F: M \dashrightarrow E$ ein Operator, so heißt F χ-Lipschitz-Operator (γ-Lipschitz-Operator), falls es eine Zahl $\lambda>0$ gibt mit

(3) $\chi(F(N)) \leq \lambda\chi(N)$ $\quad$ $(\gamma(F(N)) \leq \lambda\gamma(N))$

für alle $N \subseteq M$. In diesem Fall wird die untere Grenze aller $\lambda>0$ mit (3) als Hausdorffsches Nichtkompaktheitsmaß $\chi(F)$ (Kuratowskisches Nichtkompaktheitsmaß $\gamma(F)$) des Operators F bezeichnet.

Besonders ausführlich untersucht wurden bisher die Klasse der strikt χ-kondensierenden bzw. strikt γ-kondensierenden

Operatoren (das sind solche mit $\chi(F(N)) \leq \lambda\chi(N)$ bzw. $\gamma(F(N)) \leq \lambda\gamma(N)$ für alle $N \subseteq M$ und ein $\lambda<1$), der χ-kondensierenden bzw. γ-kondensierenden Operatoren (das sind solche mit $\chi(F(N)) < \chi(N)$ bzw. $\gamma(F(N)) < \gamma(N)$ für alle nicht-totalbeschränkten Mengen $N \subseteq M$) und der χ-nichtexpansiven bzw. γ-nichtexpansiven Operatoren (das sind solche mit $\chi(F(N)) \leq \chi(N)$ bzw. $\gamma(F(N)) \leq \gamma(N)$ für alle $N \subseteq M$). So wurde für alle diese Operatoren eine umfangreiche Abbildungsgrad- und Fixpunkttheorie entwickelt, nämlich für strikt χ-kondensierende und strikt γ-kondensierende Operatoren in den Arbeiten [1],[6],[8],[9],[14],[15],[18],[28],[50],[51],[53] und [55], für χ-kondensierende und γ-kondensierende Operatoren in den Arbeiten [3],[5],[12],[17],[27],[29],[30],[32],[33], [42],[43],[45],[47],[48],[52],[54] und [57] und für χ-nichtexpansive und γ-nichtexpansive Operatoren in den Arbeiten [13],[19],[25],[35],[36],[37],[38],[39],[40],[41] und [55]. Insbesondere gilt für χ-kondensierende und γ-kondensierende Operatoren ein Fixpunktsatz des Typs: Jeder stetige Operator F, der eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge M eines Banachraums E in sich überführt und auf M χ-kondensierend oder γ-kondensierend ist, besitzt einen Fixpunkt in M. Hierin sind die klassischen Fixpunktprinzipien von Banach und Schauder enthalten, da sowohl kontrahierende als auch kompakte Operatoren auf beschränkten Mengen χ-kondensierend und γ-kondensierend sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Einführung und Untersuchung einer Klasse von Operatoren, die eine Vielzahl

bekannter Operatorenklassen umfaßt und die unter gewissen Voraussetzungen auf sehr einfache Weise mit dem Nichtkompaktheitsmaß χ zusammenhängt. (Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns im folgenden ausschließlich auf das Hausdorffsche Nichtkompaktheitsmaß χ.) Gründe für die Einführung dieser Klasse sind:

I) Weil (wegen der Vollständigkeit des Raums E) $\chi(M) = 0$ gerade für relativkompakte Mengen M und $\chi(F) = 0$ gerade für kompakte Operatoren F gilt, charakterisiert das Maß χ gewissermaßen die Abweichung vom Idealfall der Kompaktheit. Da aber kompakte Operatoren andererseits dadurch charakterisiert werden können, daß sie "beliebig gut" durch endlichdimensionale Operatoren approximierbar sind, liegt es nahe, für jeden Operator F auf einer Menge M den Grad seiner Approximierbarkeit durch einen (nicht notwendigerweise beschränkten) endlichdimensionalen Operator F_1 auf M zu messen (vgl. 2.1).

II) Wird ein Operator $F: M \dashrightarrow E$ auf einer Menge $M \subseteq E$ durch zwei verschiedene stetige endlichdimensionale Operatoren F_1 und F_2 approximiert, so kann man unter geeigneten Voraussetzungen zeigen, daß F_1 und F_2 denselben topologischen Abbildungsgrad auf M haben, so daß man diese Charakteristik als Abbildungsgrad von F erklären kann. Es scheint auf diese Weise erstmals möglich zu sein, einen Abbildungsgrad auch für unstetige Operatoren einzuführen (vgl. 3.1).

III) Obwohl stetige χ-nichtexpansive Operatoren F auf konvexen beschränkten Mengen M fixpunktfrei sein können, gilt für sie stets die Gleichheit

(4) $$\inf\{\|x-Fx\| \mid x\in M\} = 0,$$

wie aus einer Abschätzung von Furi und Martelli ([10]) folgt. Im Zusammenhang hiermit stellen diese Autoren die Frage, unter welchen Bedingungen allgemeiner eine Abschätzung der Form

(5) $$\inf\{\|x-Fx\| \mid x\in M\} \leq \gamma(M)$$

gilt, wobei γ das Nichtkompaktheitsmaß (2) ist. Es zeigt sich, daß hinreichend hierfür das Nichtverschwinden des Abbildungsgrades des Vektorfeldes $\Phi = I-F$ auf M bzgl. des Nullpunktes ist (vgl. 5.1).

Nach einer Zusammenstellung der wichtigsten im Laufe der Arbeit benutzten Begriffe im ersten Abschnitt führen wir im zweiten Abschnitt die oben erwähnte Operatorenklasse ein. Der Abschnitt 3 dient der Definition eines Abbildungsgrades für diese Operatoren F, wobei eine Besonderheit darin besteht, daß an sie hierbei keinerlei Stetigkeitsforderung gestellt zu werden braucht, eine Forderung, die in den bisher vorliegenden Abbildungsgradtheorien aus prinzipiellen Gründen unentbehrlich ist. Auf der anderen Seite wird die Menge der Punkte $y\in E$, bzgl. derer der Grad definiert wird, "erheblich" eingeschränkt: Es genügt (im Gegensatz etwa zur klassischen Leray-Schauder-Theorie) nicht mehr, das Fehlen von y-Stellen des Vektorfelds $\Phi = I-F$ auf dem Rand seines Definitionsbereiches zu fordern. Trotz dieses qualitativen Mangels hat der neu konstruierte Grad eine Reihe typischer Eigenschaften mit dem Leray-Schauder-Grad gemeinsam, die wir im vierten Abschnitt untersuchen.

Ein Hauptresultat ist dabei der Approximationssatz 3.2, der als Verallgemeinerung eines Fixpunktsatzes angesehen werden kann und der eine Reihe von Folgerungen über die minimale Verschiebung

(6) $$\eta(F,M) = \inf\{\|x-Fx\| \mid x\in M\}$$

eines Operators F auf einer beschränkten Menge M nach sich zieht; Folgerungen dieser Art werden im fünften Abschnitt behandelt. Der Abschnitt 6 dient der Übertragung der entwickelten Begriffe und Ergebnisse auf lokalkonvexe Räume E; hierbei werden die charakteristischen Zahlen wie $\chi(M)$ und $\eta(F,M)$ durch Funktionen $\hat{\chi}(M)$ und $\hat{\eta}(F,M)$ ersetzt, und entsprechende Ungleichheiten zwischen ihnen sind punktweise zu verstehen. Schließlich werden wir in Abschnitt 7 das Hauptresultat des sechsten Abschnitts auf ein unendliches Differentialgleichungssystem mit nacheilendem Argument anwenden; sowohl in den Voraussetzungen als auch in der Beweismethode folgen wir dabei im wesentlichen Badojev und Sadovskij, die in [2] ein ähnliches Resultat für eine einzelne Differentialgleichung mit nacheilendem Argument erzielten.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Pachale und Herrn Prof. Dr. I. S. Louhivaara für die aufmerksame und hilfreiche Betreuung dieser Arbeit sehr herzlich danken. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. G. Wittstock (Universität Saarbrücken) für die bereitwillige Übernahme eines Gutachtens sowie Herrn Prof. Dr. H. Scheerer und Herrn Prof. Dr. P. P. Zabrejko (Universität Jaroslavl'/UdSSR) für wertvolle Hinweise zu einzelnen Punkten dieser Arbeit.

§ 1. ABBILDUNGSGRADTHEORIE FÜR NICHTKOMPAKTE OPERATOREN

Zu Beginn stellen wir einige Hilfsmittel aus der Nichtlinearen Funktionalanalysis zusammen und geben dann einen kurzen Überblick über wichtige Operatorenklassen, für die eine Abbildungsgradtheorie vorliegt.

Ist E ein topologischer linearer Raum und M eine Teilmenge von E, so bezeichnen wir mit sp M bzw. co M die lineare bzw. konvexe Hülle von M, mit $\overline{M}$ $(\overset{\circ}{M};\dot{M})$ den Abschluß (das Innere; den Rand) von M bzgl. E; für Mengen $M_1 = M \cap E_1$, die durch Relativierung von M auf eine Teilmenge (meist einen linearen Unterraum) E_1 von E entstehen, beziehen sich die topologischen Operationen $\overline{M}_1$, $\overset{\circ}{M}_1$ und $\dot{M}_1$ stets auf die Spurtopologie von E_1 (vgl. z. B. den Beginn des dritten Abschnitts).

In den Abschnitten 2, 3, 4 und 5 setzen wir E stets als reellen Banachraum voraus; in den Beispielen treten etwa Folgenräume wie der Raum $m = \{(\xi_n)_n \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty\}$ mit der Norm $\|(\xi_n)_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ oder Funktionenräume wie der Raum $C(a,b) = \{x \mid x: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig$\}$ mit der Norm $\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|$ auf. In einem beliebigen Banachraum E bezeichnen wir für festes $x_0 \in E$ und festes $\rho_0 > 0$ mit $B(x_0,\rho_0)$ $(K(x_0,\rho_0); S(x_0,\rho_0))$ die Menge aller $x\in E$ mit $\|x-x_0\| < \rho_0$ $(\|x-x_0\| \le \rho_0; \|x-x_0\| = \rho_0)$; insbesondere schreiben wir abkürzend $B(o,1) =: B$, $K(o,1) =: K$ und $S(o,1) =: S$. Für eine Teilmenge A von E und ein Element b aus E bezeichne $\operatorname{dist}(A,b) = \inf_{a\in A} \|a-b\|$ den Abstand von b zu A.

Ist M eine beschränkte Teilmenge von E und F: M ----→ E ein Operator, so heißt F beschränkt auf M, wenn F(N) beschränkt ist für jede beschränkte Teilmenge N von M, und kompakt auf M, wenn F(N) relativkompakt ist für jede beschränkte Teilmenge N von M. Ist E_1 = sp F(M) ein endlichdimensionaler Unterraum von E, so heißt F endlichdimensional auf M. Außer kompakten Operatoren treten in dieser Arbeit folgende vier Klassen nichtkompakter Operatoren auf:

A) Sei $M \subseteq E$ beschränkt. Ein Operator F: M ----→ E heißt strikt χ-kondensierend auf M, falls es eine Zahl $\lambda<1$ gibt mit

(1) $\qquad \chi(F(N)) \leq \lambda\chi(N)$

für $N \subseteq M$. Jeder kompakte Operator ist strikt χ-kondensierend (hierbei kann λ beliebig klein gewählt werden); wie das Beispiel des Operators $F(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (\frac{1}{2}\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\ldots)$ auf der Einheitskugel M = K im Banachraum E = m zeigt, gilt die Umkehrung nicht.

B) Sei $M \subseteq E$ beschränkt. Ein Operator F: M ----→ E heißt χ-kondensierend auf M, falls

(2) $\qquad \chi(F(N)) < \chi(N)$

für jede Menge $N \subseteq M$ gilt, die nicht relativkompakt ist. Jeder strikt χ-kondensierende Operator ist χ-kondensierend (trivialerweise); wie das Beispiel des Operators $F(\xi_1,\xi_2,\ldots) =$ $= ([1-\|x\|]\xi_1,[1-\|x\|]\xi_2,\ldots)$ auf der Einheitskugel M = K im Banachraum E = m zeigt, gilt die Umkehrung nicht.

C) Sei $M \subseteq E$ beschränkt und F: M ----→ E ein Operator. Sei $(K_\alpha)_\alpha$ definiert durch $K_0 = M$, $K_1 = \overline{co}\ F(M)$ und

$$(3) \qquad K_\alpha = \begin{cases} \overline{\text{co}}\, F(M \cap K_{\alpha-1}) & \text{falls } \alpha-1 \text{ existiert} \\ \bigcap_{\alpha>\beta} K_\beta & \text{falls nicht.} \end{cases}$$

Die transfinite Folge $(K_\alpha)_\alpha$ ist dann stationär, d. h. es gibt eine Ordinalzahl η mit $K_\eta = K_{\eta+1} = \ldots =: K[F,M]$. Der Operator $F: M \dashrightarrow E$ heißt <u>limeskompakt auf M</u>, falls $F(M \cap K[F,M])$ relativkompakt ist. (Die Menge $K[F,M]$ heißt der Limesbereich von F bzgl. M.) Jeder χ-kondensierende Operator ist limeskompakt (hierbei ist der Limesbereich selbst stets kompakt); wie das Beispiel des Operators $F(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (\frac{1}{2\sqrt{\|x\|}}\xi_1, \frac{1}{2\sqrt{\|x\|}}\xi_2, \ldots)$ auf der Einheitskugel $M = K$ im Banachraum $E = m$ zeigt, gilt die Umkehrung nicht.

D) Sei $M \subseteq E$ beschränkt und $F: M \dashrightarrow E$ ein Operator. Eine konvexe Menge $\Delta \subseteq E$ heißt fundamental für F bzgl. M, falls $F(M \cap \Delta) \subseteq \Delta$ ist und falls für alle $x_0 \in M$ mit $x_0 \notin \Delta$

$$(4) \qquad x_0 \notin \text{co}\,(\{Fx_0\} \cup \Delta)$$

gilt. Der Operator $F: M \dashrightarrow E$ heißt <u>kompakt einschränkbar auf M</u>, falls es eine abgeschlossene konvexe Menge R in E gibt derart, daß R eine fundamentale Menge Δ enthält und daß F die Menge $M \cap R$ kompakt in die Menge R abbildet. Jeder limeskompakte Operator ist kompakt einschränkbar (hierbei kann $\Delta = K[F,M]$ gewählt werden); wie das Beispiel des Operators $F(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (\xi_2,\xi_3,\ldots)$ auf der Einheitskugel $M = K$ im Banachraum $E = m$ zeigt, gilt die Umkehrung nicht.

Ist E ein Banachraum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt, $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ ein Operator, $\Phi = I-F$ und $y \in E \setminus \Phi(\dot{\Omega})$, so existieren folgende Abbildungsgrade:

1.) Der Abbildungsgrad $\deg_B(\Phi,\Omega,y)$ von Brouwer für stetige endlichdimensionale Operatoren (vgl. [7], S. 65).

2.) Der Abbildungsgrad $\deg_{LS}(\Phi,\Omega,y)$ von Leray und Schauder für stetige kompakte Operatoren (vgl. [7], S. 67), konstruiert mit Hilfe des Grades $\deg_B$.

3.) Der Abbildungsgrad $\deg_N(\Phi,\Omega,y)$ von Nussbaum für stetige strikt χ-kondensierende Operatoren (vgl.[27]), konstruiert mit Hilfe des Grades $\deg_{LS}$.

4.) Der Abbildungsgrad $\deg_P(\Phi,\Omega,y)$ von Petryshyn für stetige χ-kondensierende Operatoren (vgl. [35]), konstruiert mit Hilfe des Grades $\deg_N$.

5.) Der Abbildungsgrad $\deg_S(\Phi,\Omega,y)$ von Sadovskij für stetige limeskompakte Operatoren (vgl. [47]), konstruiert mit Hilfe des Grades $\deg_{LS}$.

6.) Der Abbildungsgrad $\deg_{ZK}(\Phi,\Omega,y)$ von Zabrejko und Krasnosel'skij für stetige kompakt einschränkbare Operatoren (vgl. [22], S. 246), konstruiert mit Hilfe des Grades $\deg_{LS}$.

Die Krasnosel'skij folgende sowjetische Schule betrachtet dabei vor allem die sogenannte Rotation des Vektorfeldes $\Phi = I-F$ auf Ω, definiert durch $\gamma(\Phi,\Omega) = \deg(\Phi,\Omega,o)$.

Neben den oben erwähnten Arbeiten, die die Existenz und gewisse Standardeigenschaften dieser Grade zeigen, wurden in [31] und [57] Eindeutigkeitssätze für diese Grade bewiesen.

In den Abschnitten 6 und 7 werden wir die vorliegende Theorie in ihren Grundzügen auf lokalkonvexe Räume übertragen. Wir betrachten dabei stets reelle lokalkonvexe Räume E und Nullumgebungssysteme τ in E mit folgenden Eigenschaften:

a) Jedes $U \in \mathcal{T}$ ist absorbierend, absolutkonvex und abgeschlossen.

b) Zu $V \in \mathcal{T}$ existiert stets ein $U \in \mathcal{T}$ mit $U+U \subseteq V$ (Stetigkeit der Addition).

c) Für $U \in \mathcal{T}$ und $\lambda > 0$ ist stets auch $\lambda U \in \mathcal{T}$ (Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren).

d) Zu jedem $x_0 \in E \setminus \{o\}$ existiert ein $U_0 \in \mathcal{T}$ mit $x_0 \notin U_0$ (Trennungseigenschaft).

e) Endliche Durchschnitte $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ von Mengen $U_1, \ldots, U_n$ aus $\mathcal{T}$ liegen wieder in $\mathcal{T}$.

Ist $Q = \{q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine die lokalkonvexe Topologie auf E erzeugende punktetrennende Familie stetiger Halbnormen, so kann die Menge aller $U = U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \varepsilon) = \{x \mid x \in E, \max_{i=1,\ldots,n} q_{\alpha_i}(x) \leq \varepsilon\}$ als Nullumgebungssystem $\mathcal{T}$ mit den oben angegebenen Eigenschaften dienen. In den Beispielen betrachten wir etwa Folgenräume wie den Raum $s = \{(\xi_n)_n \mid (\xi_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}\}$ mit $q_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = |\xi_n|$ $(n \in \mathbb{N})$ oder Funktionenräume wie den Raum $C(\mathbb{R}) = \{x \mid x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig$\}$ mit $q_n(x) = \max_{|t| \leq n} |x(t)|$ $(n \in \mathbb{N})$. In diesem Fall erzeugt die durch

$$(5) \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n(x-y)}{1+q_n(x-y)}$$

definierte Metrik zwar dieselbe Topologie wie das aus $Q = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abgeleitete Nullumgebungssystem $\mathcal{T}$, sie ist aber für unsere Zwecke ungeeignet, da die mit Hilfe dieser Metrik definierten ρ-Kugeln $\{x \mid x \in E,\ d(x,o) \leq \rho\}$ im allgemeinen nicht konvex sind.

Ist M eine Teilmenge eines lokalkonvexen Raums E mit erzeugender Halbnormfamilie $Q = \{q_\alpha \mid \alpha \in A\}$, so heißt eine Menge $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein endliches ε-Netz von M in E bzgl. q_α, falls $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq E$ ist und es für jedes $x \in M$ ein i gibt mit $q_\alpha(x-x_i) < \varepsilon$. Mit Hilfe dieses Begriffes hat Sadovskij in [47] das Nichtkompaktheitsmaß χ auf lokalkonvexe Räume übertragen (vgl. auch 6.1). Die Mengen M mit $\chi(M) = 0$ sind auch hier gerade die totalbeschränkten Mengen; da das Maß χ aber die "Nichtkompaktheit" von M messen soll, setzen wir E in den letzten beiden Abschnitten als vollständig voraus, denn eine Menge M in einem lokalkonvexen Raum E ist genau dann kompakt, wenn sie totalbeschränkt und vollständig ist (vgl. [20] und [21]).

Betrachtet man Operatoren $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ auf dem Abschluß einer offenen Teilmenge Ω eines lokalkonvexen Raums E, so darf man - will man eine echte Verallgemeinerung gegenüber normierten Räumen erhalten - die Menge Ω nicht mehr als beschränkt voraussetzen, da ein lokalkonvexer Raum mit einer beschränkten offenen Menge stets normierbar ist. Im Hinblick hierauf definiert man Beschränktheit und Kompaktheit von Operatoren in lokalkonvexen Räumen etwas anders: Ein Operator $F: M \dashrightarrow E$ ($M \subseteq E$ nicht notwendig beschränkt) heißt <u>beschränkt auf M</u>, wenn F(M) beschränkt ist, und <u>kompakt auf M</u>, wenn F(M) relativkompakt ist.

Ist $\Omega \subseteq E$ offen und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ ein Operator, so existiert ein Abbildungsgrad von $\Phi = I-F$ auf Ω bzgl. $y \in E \setminus \Phi(\dot{\Omega})$, falls F stetig, beschränkt und endlichdimensional (vgl. [7]) oder stetig, beschränkt und kompakt (vgl. [26]) ist. Der in [26] von Nagumo erklärte Grad wird Grundlage von Abschnitt 6 sein.

§ 2. APPROXIMIERBARE OPERATOREN IN NORMIERTEN RÄUMEN

In diesem Abschnitt definieren wir Größen, die angeben, "bis auf welchen Fehler" ein gegebener (nicht notwendigerweise stetiger oder beschränkter) Operator F durch einen endlichdimensionalen Operator F_1 mit gewissen Zusatzbedingungen approximiert werden kann. Dazu sei im folgenden E stets ein Banachraum und M eine nichtleere beschränkte Teilmenge von E.

2.1. Definition: Ein Operator $F: M \dashrightarrow E$ heiße approximierbar (beschränkt approximierbar; in sich beschränkt approximierbar) auf M, falls es eine Zahl $\varepsilon>0$ und einen stetigen endlichdimensionalen Operator $F_1: M \dashrightarrow E_1$ (einen stetigen beschränkten endlichdimensionalen Operator $F_1: M \dashrightarrow E_1$; einen stetigen beschränkten endlichdimensionalen Operator $F_1: M \dashrightarrow M \cap E_1$) gibt derart, daß $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ ist für alle $x \in M$. In diesem Fall bezeichnen wir die untere Grenze aller dieser ε mit $\alpha_0(F,M)$ ($\alpha_1(F,M)$; $\alpha_2(F,M)$), im gegenteiligen Fall setzen wir $\alpha_0(F,M) = \infty$ ($\alpha_1(F,M) = \infty$; $\alpha_2(F,M) = \infty$). □

Trivialerweise gilt stets die Ungleichheitskette

$$\alpha_0(F,M) \leq \alpha_1(F,M) \leq \alpha_2(F,M). \tag{1}$$

Einen Bezug der Größen α_i zum Nichtkompaktheitsmaß χ stellt das folgende Lemma her:

2.2. Lemma: Ist F auf M stetig und beschränkt, so ist

$$\alpha_0(F,M) = \alpha_1(F,M) = \chi(F(M)). \tag{2}$$

Beweis: Wir zeigen, daß

$$\alpha_1(F,M) \leq \chi(F(M)) \leq \alpha_0(F,M) \tag{3}$$

ist, zusammen mit (1) folgt daraus dann die Behauptung.
Wegen der Beschränktheit von M und F ist zunächst $\chi(F(M))$
Zu beliebigem $\varepsilon > \chi(F(M))$ existiert also ein ε-Netz
$\{y_1,\ldots,y_m\}$ von F(M) in E. Sei wie üblich π_j: M ----→ $\mathbb{R}$
$(j = 1,\ldots,m)$ definiert durch $\pi_j(x) = \max\{0, \varepsilon-\|Fx-y_j\|\}$
und F_1: M ----→ E_1 ($E_1 = sp\ \{y_1,\ldots,y_m\}$) definiert durch

$$F_1x = \sum_{j=1}^{m} \frac{\pi_j(x)y_j}{\pi_1(x)+\ldots+\pi_m(x)}. \tag{4}$$

Dann ist F_1 endlichdimensional, stetig und beschränkt auf
M, und für $x\in M$ gilt stets $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$; also ist auch
$\alpha_1(F,M) \leq \varepsilon$, woraus $\alpha_1(F,M) \leq \chi(F(M))$ folgt.
Sei nun $\varepsilon > \alpha_0(F,M)$ fest und F_1: M ----→ E_1 endlichdimensional und stetig mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für $x\in M$. Mit F(M)
ist auch $F_1(M)$ beschränkt, also relativkompakt. Damit gilt

$$\chi(F(M)) \leq \chi(F_1(M)) + \varepsilon = \varepsilon, \tag{5}$$

woraus $\chi(F(M)) \leq \alpha_0(F,M)$ folgt.□

2.3. Bemerkung: Ist F auf M stetig, aber unbeschränkt, so ist $\chi(F(M)) = \infty$. Daß $\alpha_0(F,M)$ auch in diesem Fall endlich sein kann, zeigen die folgenden beiden Beispiele:

1.) Sei E = m, M = $B(o,\rho)$ $(\rho>0)$ und F: M ----→ E definiert durch

$$F(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots) = ([\rho-|\xi_1|]^{-1},\xi_2,\xi_3,\ldots). \tag{6}$$

Dann ist $\chi(F(M)) = \infty$, aber $\alpha_0(F,M) \leq \rho$, da für den stetigen Operator $F_1(\xi_1,\xi_2,\ldots) = ([\rho-|\xi_1|]^{-1},0,\ldots)$ auf M die Abschätzung

(7) $$\|Fx - F_1x\| \leq \rho$$

gilt.

2.) Sei wieder $E = m$, $M = K(o,\frac{5}{4})$ und $(x_k)_k$ eine Folge in $S = S(o,1)$ mit $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ für $i \neq j$ (Rieszsches Lemma). Sei $\psi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

(8) $$\psi(x) = \begin{cases} k & \text{falls } x=x_k \text{ für ein } k \text{ ist,} \\ k(1-4\|x-x_k\|) & \text{falls } \|x-x_k\| \leq \frac{1}{4} \text{ für ein } k \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } \|x-x_k\| > \frac{1}{4} \text{ für alle } k \text{ ist,} \end{cases}$$

und $F\colon M \longrightarrow E$ definiert durch

(9) $$F(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots) = (\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots),\xi_2,\xi_3,\ldots).$$

Dann ist $\chi(F(M)) = \infty$, aber $\alpha_0(F,M) \leq \frac{5}{4}$, da für den stetigen Operator $F_1(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots),0,\ldots)$ auf M die Abschätzung

(10) $$\|Fx - F_1x\| \leq \frac{5}{4}$$

gilt.□

Wir zeigen nun, daß in der Abschätzung (1) außer der strikten Ungleichheit auf beiden Seiten alle möglichen Fälle auftreten können:

1.) Der Fall

(11) $$\alpha_0(F,M) < \alpha_1(F,M) < \alpha_2(F,M)$$

kann nicht auftreten: Gilt nämlich die rechte strikte Ungleichheit für einen Operator F auf einer Menge M, so muß $\alpha_1(F,M) < \infty$ sein; hieraus folgt sofort die Beschränktheit von $F(M)$, denn es gibt in diesem Fall zu jedem $\varepsilon > \alpha_1(F,M)$ einen beschränkten Operator $F_1\colon M \longrightarrow E_1$ mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für alle $x \in M$, also

(12) $\sup_{x\in M}\|Fx\| \leq \sup_{x\in M}\|F_1x\| + \varepsilon < \infty.$

Ist aber F(M) beschränkt, so ist auch $F_1(M)$ beschränkt für jeden endlichdimensionalen stetigen Operator $F_1: M \dashrightarrow E_1$ mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > \alpha_0(F,M)$; hieraus folgt die Gleichheit von $\alpha_0(F,M)$ und $\alpha_1(F,M)$.

2.) Als Beispiel für den Fall

(13) $$\alpha_0(F,M) < \alpha_1(F,M) = \alpha_2(F,M)$$

wählen wir E, M und F wie im ersten Beispiel unter 2.3; es ist dann $\rho = \alpha_0(F,M) < \alpha_1(F,M) = \alpha_2(F,M) = \infty$.

3.) Als Beispiel für den Fall

(14) $$\alpha_0(F,M) = \alpha_1(F,M) < \alpha_2(F,M)$$

wählen wir $E = C(0,1)$, $M = \{x \mid 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$ und

(15) $$[Fx](t) = \begin{cases} 2x(t) & \text{für } 0 \leq x(t) \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x(t) \leq 1. \end{cases}$$

Es ist dann $\frac{1}{2} = \alpha_0(F,M) = \alpha_1(F,M) < \alpha_2(F,M) = 1$.

4.) Als Beispiel für den Fall

(16) $$\alpha_0(F,M) = \alpha_1(F,M) = \alpha_2(F,M)$$

wählen wir für E einen beliebigen unendlichdimensionalen Banachraum, $M = K = K(o,1)$ und $Fx = x$. Es ist dann $\alpha_0(F,M) = \alpha_1(F,M) = \alpha_2(F,M) = 1$.□

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden vor allem die Größen α_0 und α_1 eine wesentliche Rolle spielen. Der Grund hierfür liegt in der engen Verwandtschaft dieser Größen mit

dem Nichtkompaktheitsmaß χ. Zunächst beweisen wir einige elementare Eigenschaften von α_0 und α_1 und untersuchen dann, was die Gleichheit $\alpha_0(F,M) = 0$ bzw. $\alpha_1(F,M) = 0$ für einen stetigen Operator F auf M bedeutet.

2.4. Lemma: Die Größe α_i $(i = 0,1)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Monotonie: Aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $\alpha_i(F,M_1) \leq \alpha_i(F,M_2)$, und aus $F_1 \subseteq F_2$ (F_2 setzt F_1 fort) folgt $\alpha_i(F_1,M) \leq \alpha_i(F_2,M)$.

b) Sublinearität: Es gelten die Beziehungen $\alpha_i(F,M_1+M_2) \leq \alpha_i(F,M_1) + \alpha_i(F,M_2)$ und $\alpha_i(F,\lambda M) = \lambda\alpha_i(F,M)$ $(\lambda>0)$ für lineares F und die Beziehungen $\alpha_i(F_1+F_2,M) \leq \alpha_i(F_1,M) + \alpha_i(F_2,M)$ und $\alpha_i(\lambda F,M) = \lambda\alpha_i(F,M)$ $(\lambda>0)$ allgemein.

c) Normalität: Für einen stetigen χ-Lipschitz-Operator F auf der Einheitskugel K gilt $\alpha_i(F,K) = \chi(F)$, und für den identischen Operator I auf einer beschränkten Menge M gilt $\alpha_i(I,M) = \chi(M)$.

Beweis: Wir beweisen die obenstehenden Eigenschaften nur für α_1, da die Beweise für α_0 genauso verlaufen. Darüberhinaus nehmen wir in a) und b) die Größe α_1 stets als endlich an, da der gegenteilige Fall trivial ist.

a) Sei $F: M_2 \dashrightarrow E$ beschränkt approximierbar auf M_2, $\varepsilon > \alpha_1(F,M_2)$ und $F_1: M_2 \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für alle $x \in M_2$. Dann gilt dieselbe Abschätzung für $x \in M_1$, woraus die erste Ungleichheit folgt. Ist nun F_1 ein Operator auf einer Menge $M_1 \subseteq M$ und F_2 eine Fortsetzung von F_1 auf eine Menge $M_2 \subseteq M$, so folgt aus dem soeben Bewiesenen die zweite Ungleichheit.

b) Sei $F: M \longrightarrow E$ linear und beschränkt approximierbar auf M und gelte $M_1 \subseteq M$, $M_2 \subseteq M$, $M_1+M_2 \subseteq M$ und $\lambda M \subseteq M$. Ist dann $\varepsilon_i > \alpha_1(F,M_i)$ und $F_{1i}: M_i \longrightarrow E_{1i}$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $\|Fx_i - F_{1i}x_i\| < \varepsilon_i$ für $x_i \in M_i$ $(i = 1,2)$, so gilt für den durch $F_1(x_1+x_2) = F_{11}x_1 + F_{12}x_2$ definierten Operator $F_1: M_1+M_2 \longrightarrow E_1$ $(E_1 = E_{11}+E_{12})$

$$(17) \qquad \|Fx - F_1x\| = \|Fx_1 + Fx_2 - F_{11}x_1 - F_{12}x_2\| \leq$$

$$\leq \|Fx_1 - F_{11}x_1\| + \|Fx_2 - F_{12}x_2\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

für $x = x_1+x_2 \in M_1+M_2$, woraus $\alpha_1(F,M_1+M_2) \leq \alpha_1(F,M_1)+\alpha_1(F,M_2)$ folgt. Ist weiter $\lambda>0$, $\varepsilon > \alpha_1(F,M)$ und $F_1: M \longrightarrow E_1$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für $x \in M$, so gilt für den durch $F_{1\lambda}(\lambda x) = \lambda F_1 x$ definierten Operator $F_{1\lambda}: \lambda M \longrightarrow E_1$

$$(18) \qquad \|Fy - F_{1\lambda}y\| = \|\lambda Fx - \lambda F_1x\| =$$

$$= |\lambda| \, \|Fx - F_1x\| < \lambda\varepsilon$$

für $y = \lambda x \in \lambda M$, woraus einerseits $\alpha_1(F,\lambda M) \leq \lambda\alpha_1(F,M)$ folgt. Durch Betrachtung von $\frac{1}{\lambda}$ statt λ erhält man andererseits auch $\lambda\alpha_1(F,M) \leq \alpha_1(F,\lambda M)$.

Seien nun $F_1: M \longrightarrow E$ und $F_2: M \longrightarrow E$ zwei beschränkt approximierbare Operatoren. Ist dann $\varepsilon_i > \alpha_1(F_i,M)$ und $F_{i1}: M \longrightarrow E_{i1}$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $\|F_ix - F_{i1}x\| < \varepsilon_i$ für $x \in M$ $(i = 1,2)$, so gilt für den durch $F_1x = F_{11}x + F_{21}x$ definierten Operator $F_1: M \longrightarrow E_1$ $(E_1 = E_{11}+E_{21})$

$$(19) \qquad \|Fx - F_1x\| = \|F_1x + F_2x - F_{11}x - F_{21}x\| \leq$$

$$\leq \|F_1x - F_{11}x\| + \|F_2x - F_{21}x\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

für $x \in M$, woraus $\alpha_1(F_1+F_2,M) \leq \alpha_1(F_1,M) + \alpha_1(F_2,M)$ folgt. Ist weiter $\lambda>0$, $\varepsilon > \alpha_1(F,M)$ und $F_1: M \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für $x \in M$, so gilt für den durch $F_{\lambda 1}x = \lambda F_1 x$ definierten Operator $F_{\lambda 1}: M \dashrightarrow E_1$

$$(20) \qquad \|\lambda Fx - F_{\lambda 1}x\| = \|\lambda Fx - \lambda F_1 x\| = \\ = |\lambda| \, \|Fx - F_1 x\| < \lambda\varepsilon$$

für $x \in M$, woraus einerseits $\alpha_1(\lambda F,M) \leq \lambda\alpha_1(F,M)$ folgt. Durch Betrachtung von $\frac{1}{\lambda}$ statt λ erhält man andererseits auch $\lambda\alpha_1(F,M) \leq \alpha_1(\lambda F,M)$.

c) Beide Gleichheiten folgen aus Lemma 2.2, da nach Voraussetzung sowohl F auf K als auch I auf M stetig und beschränkt ist.□

2.5. Lemma: Sei $F: M \dashrightarrow E$ stetig auf M. Dann impliziert jede der nachstehenden Aussagen die folgende:

a) $F(M)$ ist relativkompakt,

b) $\alpha_1(F,M) = 0$,

c) $\alpha_0(F,M) = 0$,

d) $F(M) \cap B(o,\rho)$ ist relativkompakt für alle $\rho>0$.

Ist F zusätzlich noch beschränkt auf M, so sind alle vier Aussagen äquivalent.

Beweis: Ist $F(M)$ relativkompakt, so ist F beschränkt auf M, und die Aussage folgt aus Lemma 2.2. Die zweite Implikation folgt trivialerweise aus der Ungleichheit (1). Sei nun $\alpha_0(F,M) = 0$, $\varepsilon>0$ und $F_1: M \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für alle $x \in M$. Für festes $\rho>0$ gibt es

wegen der Relativkompaktheit von $F_1(M) \cap B(o,\rho+\varepsilon) \subseteq E_1$ zu jedem $\eta>0$ ein endliches η-Netz $\{y_1,\ldots,y_m\}$ in $F_1(M) \cap B(o,\rho+\varepsilon)$. Sind Punkte $x_1,\ldots,x_m \in M$ mit $y_j = F_1 x_j$ $(j = 1,\ldots,m)$ gewählt, so ist $\{Fx_1,\ldots,Fx_m\}$ ein endliches $(\varepsilon+\eta)$-Netz in $F(M) \cap B(o,\rho) \subseteq E$. Aus der beliebigen Wahl von $\varepsilon>0$ und $\eta>0$ folgt die Relativkompaktheit von $F(M) \cap B(o,\rho)$.

Ist schließlich F beschränkt auf M, so beweist man aus d) leicht a), indem man $\rho > \sup_{x\in M} \|Fx\|$ wählt.□

§ 3. EIN ABBILDUNGSGRAD FÜR APPROXIMIERBARE OPERATOREN

Die Definition der Approximierbarkeit legt nahe, für einen approximierbaren Operator F einen Abbildungsgrad über den F approximierenden endlichdimensionalen Operator F_1 zu definieren; da der Brouwersche Grad in endlichdimensionalen Räumen auch für unbeschränkte Operatoren (auf einer beschränkten Menge) erklärt ist, können wir uns hierbei auf die Größe α_0 beschränken.

Sei also $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt, $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$, $\Phi = I-F$ und

$$(1) \qquad Z(F,\overline{\Omega}) = \{y \mid y\in E,\ \operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) > \alpha_0(F,\overline{\Omega})\}.$$

Sei weiter $y\in Z(F,\overline{\Omega})$ fest, $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y)$ und $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|Fx - F_1x\|<\varepsilon$ für alle $x\in\overline{\Omega}$, wobei o.B.d.A. $y\in E_1$ und $\Omega_1 := \Omega \cap E_1 \neq \emptyset$ gelte. Es gilt dann

$$(2) \qquad y \notin \Phi_1(\dot{\Omega}_1) \qquad (\Phi_1 = I-F_1),$$

denn wäre $y = \Phi_1 x_1$ für ein $x_1\in\dot{\Omega}_1$, so wäre $\|\Phi x_1 - y\| \leq \|\Phi x_1 - \Phi_1 x_1\| < \varepsilon$ im Widerspruch zur Wahl von ε. (Wir erinnern daran, daß $\overline{\Omega}$ ($\dot{\Omega}$) den Abschluß (den Rand) von Ω bzgl. E und $\overline{\Omega}_1$ ($\dot{\Omega}_1$) den Abschluß (den Rand) von Ω_1 bzgl. E_1 bezeichnet; es ist dann $\overline{\Omega}_1 \subseteq \overline{\Omega}$ und $\dot{\Omega}_1 \subseteq \dot{\Omega}$.) Wegen (2) ist der Brouwersche Abbildungsgrad $\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y)$ des Feldes $\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1}: \overline{\Omega}_1 \dashrightarrow E_1$ auf Ω_1 bzgl. y definiert. Daß diese Zahl unabhängig von E_1 und F_1 ist, sieht man wie folgt: Sei $F_2: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_2$ ein weiterer endlichdimensionaler stetiger Operator mit $y\in E_2$, $\Omega_2 :=$

$= \Omega \cap E_2 \neq \emptyset$ und $\|Fx - F_2x\| < \varepsilon$ für alle $x \in \overline{\Omega}$, so daß wie oben $\deg_B(\Phi_2|_{\overline{\Omega}_2}, \Omega_2, y)$ $(\Phi_2 = I - F_2)$ definiert ist. Sei weiter $E_0 := E_1 + E_2$ und $\Omega_0 := \Omega \cap E_0$. Nach der Reduktionseigenschaft des Brouwer-Grades ist

$$(3) \qquad \deg_B(\Phi_i|_{\overline{\Omega}_i}, \Omega_i, y) = \deg_B(\Phi_i|_{\overline{\Omega}_0}, \Omega_0, y) \qquad (i = 1,2).$$

Wird jetzt eine stetige Homotopie $H_0 : [0,1] \times \overline{\Omega}_0 \longrightarrow E_0$ definiert durch $H_0(t,x) = (1-t)F_1x + tF_2x$, so gilt

$$(4) \qquad y \notin \Xi_0([0,1] \times \dot{\Omega}_0) \qquad (\Xi_0 = I - H_0),$$

denn wäre $y = \Xi_0(t_0, x_0)$ für ein $t_0 \in [0,1]$ und ein $x_0 \in \dot{\Omega}_0$, so wäre $\|\Phi x_0 - y\| \leq \|\Phi x_0 - \Xi_0(t_0, x_0)\| \leq (1-t_0)\|\Phi x_0 - \Phi_1 x_0\| + t_0\|\Phi x_0 - \Phi_2 x_0\| < \varepsilon$ im Widerspruch zur Wahl von ε. Wegen (4) und wegen der Homotopieinvarianz des Brouwer-Grades ist also

$$(5) \qquad \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}}, \Omega, y) = \deg_B(\Phi_2|_{\overline{\Omega}}, \Omega, y),$$

woraus zusammen mit (3) die Gleichheit

$$(6) \qquad \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, y) = \deg_B(\Phi_2|_{\overline{\Omega}_2}, \Omega_2, y)$$

folgt; diese Gleichheit macht die folgende Definition sinnvoll:

3.1. Definition: Die in obenstehender Weise erklärte ganze Zahl $\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, y)$ heiße der Abbildungsgrad von Φ auf Ω bzgl. y und werde mit $\deg(\Phi, \Omega, y)$ bezeichnet. Ist insbesondere $o \in Z(F, \overline{\Omega})$ (d.h. $\inf_{x \in \dot{\Omega}} \|\Phi x\| > \alpha_0(F, \overline{\Omega})$), so heiße die ganze Zahl $\gamma(\Phi, \Omega) = \deg(\Phi, \Omega, o)$ die Rotation von Φ auf Ω. □

Der so definierte Abbildungsgrad hat den Nachteil, nur für gewisse $y \in E$ erklärt zu sein, aber den Vorteil, auch auf solche Operatorenklassen anwendbar zu sein, für die ein

topologischer Grad bisher aus prinzipiellen Gründen nicht erklärbar war. Angesichts dieser Allgemeinheit ist kaum zu erwarten, daß etwa Fixpunktaussagen in derselben Schärfe wie im Falle kompakter stetiger oder χ-kondensierender stetiger Operatoren gewonnen werden können. Aus dem folgenden Satz geht aber hervor, daß das Nichtverschwinden des Grades $\deg(\Phi,\Omega,y)$ eine Aussage über die approximativen Lösungen x der Gleichung $\Phi x = y$ in $\overline{\Omega}$ ermöglicht:

3.2. Satz: Sei $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$, $y \in Z(F,\overline{\Omega})$, $\Phi = I-F$ und $\deg(\Phi,\Omega,y) \neq 0$. Dann gilt die Abschätzung

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} \|\Phi x - y\| \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega}). \tag{7}$$

Beweis: Sei $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Phi(\mathring{\Omega})),y)$ und $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für $x\in\overline{\Omega}$. Wegen $\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) \neq 0$ (Φ_1 und Ω_1 wie oben) existiert ein $x_\varepsilon \in \overline{\Omega}_1 \subseteq \overline{\Omega}$ mit $\Phi_1 x_\varepsilon = y$, also $\|\Phi x_\varepsilon - y\| \leq \|\Phi x_\varepsilon - \Phi_1 x_\varepsilon\| < \varepsilon$, woraus die Behauptung folgt.□

3.3. Beispiele: Zur Veranschaulichung der Definition von $\deg(\Phi,\Omega,y)$ bringen wir einige Beispiele:

1.) Sei E ein beliebiger Banachraum, $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ stetig und kompakt auf $\overline{\Omega}$. Dann ist $\Phi(\mathring{\Omega})$ abgeschlossen in E und $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = 0$ nach Lemma 2.5, also

$$Z(F,\overline{\Omega}) = E \setminus \Phi(\mathring{\Omega}). \tag{8}$$

Wie man unmittelbar durch Vergleich von Definition 3.1 mit der Definition des Leray-Schauder-Grades sieht (vgl. z. B.

[7], S. 67), ist hier

$$\deg(\Phi,\Omega,y) = \deg_{LS}(\Phi,\Omega,y) \tag{9}$$

und insbesondere im Fall $o \notin \Phi(\dot{\Omega})$

$$\gamma(\Phi,\Omega) = \deg_{LS}(\Phi,\Omega,o). \tag{10}$$

2.) Sei $E = C(0,1)$, $\Omega = B(o,\rho)$ mit $0<\rho<\frac{1}{2}$ und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ definiert durch

$$[Fx](t) = x(t)^2 \qquad (0\le t\le 1). \tag{11}$$

Hier ist nach Lemma 2.2

$$\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \chi(F(\overline{\Omega})) = \rho^2 \tag{12}$$

und $\|\Phi x\| = \rho - \rho^2$ für $x\in\dot{\Omega}$. Sei nun $0<\delta<\rho-2\rho^2$ und sei $y\in E$ mit $0<\|y\|<\rho-2\rho^2-\delta$ fest. Dann ist $\operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) \ge \rho^2+\delta > \rho^2 = \alpha_0(F,\overline{\Omega})$, also $y\in Z(F,\overline{\Omega})$, und

$$\deg(\Phi,\Omega,y) = 1 \tag{13}$$

(vgl. Lemma 3.4). Dieser Operator ist auf $\overline{\Omega}$ zwar nicht kompakt, aber stetig und strikt χ-kondensierend mit $\chi(F) = 2\rho < 1$.

3.) Sei $E = m$, $\Omega = B(o,\rho)$ $(\rho>0)$ und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ definiert durch

$$Fx = \begin{cases} \dfrac{2\|x\|-\rho}{\|x\|}\, x & \text{für } x \neq o \\ o & \text{für } x = o. \end{cases} \tag{14}$$

Dann ist $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \rho$, wie man folgendermaßen sieht: Für den Nulloperator $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow \{o\}$ gilt einerseits $\|Fx - F_1x\| = \|Fx\| \le \rho$ für $x\in\overline{\Omega}$. Ist andererseits $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ ein beliebiger endlichdimensionaler stetiger Operator, so hat F_1 die Form

(15) $F_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots) = (\eta_1,\ldots,\eta_n,0,\ldots)$

($n\in\mathbb{N}$ fest); für den Punkt $\hat{x} = (0,\ldots,0,\rho,0,\ldots)$ (mit ρ an mindestens (n+1)-ter Stelle) gilt dann $F\hat{x} = \hat{x}$, also

(16) $\|F\hat{x} - F_1\hat{x}\| = \max\{|\eta_1|,\ldots,|\eta_n|,\rho\} \geq \rho,$

woraus $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) \geq \rho$ folgt.

Weiter ist $\Phi(\mathring{\Omega}) = \{o\}$, also $Z(F,\overline{\Omega}) = E \setminus K(o,\rho)$, und

(17) $\deg(\Phi,\Omega,y) = 0$

für $y\in Z(F,\overline{\Omega})$ (vgl. Lemma 3.4).

Dieser Operator ist nicht stetig in o und auch kein χ-Lipschitz-Operator: Gäbe es nämlich ein $\lambda>0$ mit $\chi(F(N)) \leq \lambda\chi(N)$ für alle $N \subseteq \overline{\Omega}$, so gälte speziell für $\tilde{N} = B(o,\sigma)$ mit $0<\sigma<\min\{\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{\lambda}\}$ einerseits $\chi(F(\tilde{N})) \geq \rho$ (denn $F(\tilde{N})$ umfaßt den Kreisring $\{y \mid y\in E,\ \rho-2\sigma\leq\|y\|\leq\rho\}$) und andererseits $\lambda\chi(\tilde{N}) = \lambda\sigma < \rho$.

F gehört auch nicht zur größeren Klasse der limeskompakten Operatoren, denn es ist $K[F,\overline{\Omega}] = K(o,\rho)$ und die Menge $F(\overline{\Omega} \cap K(o,\rho)) = K(o,\rho)$ ist nicht relativkompakt.

Allerdings ist F kompakt einschränkbar auf $\overline{\Omega}$, wie man sieht, wenn man beispielsweise $\Delta = \{(\xi_1,0,\ldots) \mid |\xi_1| \leq \rho\}$ als Fundamentalmenge wählt: Δ ist offensichtlich konvex und erfüllt die Bedingung $F(\overline{\Omega} \cap \Delta) \subseteq \Delta$. Ist weiter $x_0\in\overline{\Omega}$ mit $x_0\in co(\{Fx_0\} \cup \Delta)$ fest (o.B.d.A. $x_0 \neq o$), so gibt es eine Zahl $\lambda_0\in[0,1]$ und ein $x_1\in\Delta$ mit

(18) $x_0 = \frac{\lambda}{\|x_0\|}(2\|x_0\|-\rho)x_0 + (1-\lambda)x_1,$

woraus notwendigerweise $x_0\in\Delta$ folgt, also

(19) $$\bigcup_{x_0 \in \overline{\Omega}} \operatorname{co}(\{Fx_0\} \cup \Delta) \subseteq \operatorname{co}\ \Delta = \Delta,$$

so daß Δ fundamental für F bzgl. $\overline{\Omega}$ ist. Wählen wir weiter $R = \Delta$, so ist die durch

(20) $$F(\xi_1, 0, 0, \ldots) = ([2|\xi_1| - \rho]\ \operatorname{sgn}\ \xi_1, 0, 0, \ldots)$$

gegebene Einschränkung von F auf $\overline{\Omega} \cap R = R$ offensichtlich kompakt. Natürlich ist auch diese Einschränkung nicht stetig im Nullpunkt, so daß die Definition des Grades $\deg_{ZK}$ von Zabrejko und Krasnosel'skij (vgl. S. 12) nicht anwendbar ist.

4.) Sei E ein beliebiger unendlichdimensionaler Banachraum, $\Omega = B(o,\rho_2) \setminus K(o,\rho_1)$ $(0<\rho_1<\rho_2)$ und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ definiert durch

(21) $$Fx = -x.$$

Offenbar ist die Rotation $\gamma(\Phi,\Omega)$ von Φ auf Ω nur dann definiert, wenn

(22) $$2\rho_1 = \inf_{x \in \partial\Omega} \|\Phi x\| > \alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \chi(F(\overline{\Omega})) = \rho_2$$

ist. In diesem Fall ist aber stets

(23) $$\gamma(\Phi,\Omega) = 0,$$

denn aus $\gamma(\Phi,\Omega) \neq 0$ würde nach Satz 3.2 die Abschätzung $\inf_{x \in \overline{\Omega}} \|\Phi x\| \leq \rho_2$ folgen, d. h. insbesondere zu $\delta = 2\rho_1 - \rho_2$ gäbe es einen Punkt $x_\delta \in \overline{\Omega}$ mit $\|\Phi x_\delta\| < \rho_2 + \delta$, woraus aber der Widerspruch

(24) $$2\rho_1 \leq 2\|x_\delta\| = \|\Phi x_\delta\| < \rho_2 + \delta = 2\rho_1$$

folgen würde.

5.) Sei E wieder ein beliebiger unendlichdimensionaler Banachraum, $\Omega = B(o,\rho)$ $(\rho>0)$, $\tilde{x}\in S(o,\rho)$ fest und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ definiert durch

$$(25) \qquad Fx = \begin{cases} -\rho\frac{x}{\|x\|} & \text{für } x \neq o \\ \tilde{x} & \text{für } x = o. \end{cases}$$

Dann ist wegen $F(\overline{\Omega}) = \dot{\Omega}$ wieder $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \rho$, also ist wegen

$$(26) \qquad \inf_{x\in\dot{\Omega}} \|\Phi x\| = 2\rho > \rho$$

die Rotation $\gamma(\Phi,\Omega)$ definiert; außerdem ist

$$(27) \qquad \gamma(\Phi,\Omega) = 1$$

(vgl. Lemma 3.4). Aus der Tatsache, daß einerseits für $x \neq o$

$$(28) \qquad \|\Phi x\| = \|x + \frac{\rho}{\|x\|}x\| = \|x\| + \rho > \rho$$

und andererseits

$$(29) \qquad \|\Phi o\| = \|\tilde{x}\| = \rho$$

ist, sieht man an diesem Beispiel, daß die Abschätzung (7) in Satz 3.2 scharf ist.□

Zur Berechnung des Grades $\deg(\Phi,\Omega,y)$ in den vorangegangenen Beispielen kann das folgende einfache Kriterium herangezogen werden:

3.4. Lemma: Sei $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und sei $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \sup_{x\in\dot{\Omega}} \|Fx\|$. Ist dann $\deg(\Phi,\Omega,y)$ definiert, so gilt

$$(30) \qquad \deg(\Phi,\Omega,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y\in\overline{\Omega}, \\ 0 & \text{falls } y\notin\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Beweis: Ist ε mit $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y)$ fest, so gilt für den Nulloperator $F_1\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ ($E_1 = \operatorname{sp}\{y\}$) trivialerweise $\|Fx - F_1x\| = \|Fx\| < \varepsilon$ für $x\in\overline{\Omega}$. Es ist dann

$$\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) = \deg_B(I,\Omega_1,y) = \tag{31}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } y\in\overline{\Omega}_1, \\ 0 & \text{falls } y\notin\overline{\Omega}_1. \end{cases} \square$$

Wir bringen noch ein einfaches Beispiel eines approximierbaren Operators, dessen Grad von 0 und 1 verschieden ist:

Sei $E = m$, $\Omega = B(o,\rho)$ $(\rho>1)$, $0<\sigma<\frac{\rho}{2}$ und $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ definiert durch

$$F(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots) = (\xi_1[1-\xi_1+2\xi_2],\xi_2[1-2\xi_1+\xi_2],\tfrac{\sigma}{\rho}\xi_3,\ldots). \tag{32}$$

Dann ist F stetig und beschränkt auf $\overline{\Omega}$, also $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \chi(F(\overline{\Omega})) = \sigma$ und

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|Fx\| = \rho^2 + \rho > \sigma. \tag{33}$$

Für $y := (1,0,0,\ldots)$ gilt weiter

$$\operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) = \inf_{x\in\dot{\Omega}} \|\Phi x - y\| = \rho - \sigma \tag{34}$$

($\Phi = I-F$), wegen $\rho-\sigma > \rho-\frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} > \sigma$ ist also der Grad $\deg(\Phi,\Omega,y)$ definiert. Wählen wir nun $E_1 = \{(\xi_1,\xi_2,0,\ldots) | \xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}\}$, $\Omega_1 = \{(\xi_1,\xi_2,0,\ldots) | \max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}<\rho\}$ und

$$F_1(\xi_1,\xi_2,0,..) = (\xi_1[1-\xi_1+2\xi_2],\xi_2[1-2\xi_1+\xi_2],0,\ldots), \tag{35}$$

$((\xi_1,\xi_2,0,\ldots)\in\overline{\Omega}_1)$, so sind $(1,0,0,\ldots)$ und $(-1,0,0,\ldots)$ die einzigen y-Stellen von $\Phi_1 = I-F_1$ in $\overline{\Omega}_1$ und es ist

$\det \Phi_1'(1,0,0,\ldots) = \det \Phi_1'(-1,0,0,\ldots) = 4$ (Φ_1' bezeichne die Frêchet-Ableitung von Φ_1), also

$$\deg(\Phi,\Omega,y) = \operatorname{sgn} \det \Phi_1'(1,0,0,\ldots) + \operatorname{sgn} \det \Phi_1'(-1,0,0,\ldots) = 2. \quad (36)$$

□

Zum Schluß dieses Abschnitts vergleichen wir den in 3.1 definierten Abbildungsgrad mit einem verallgemeinerten Fixpunktindex, den Nussbaum auf ähnliche Weise in [34] eingeführt hat und der auch auf zahlreiche Operatorenklassen anwendbar ist. Die dort getroffenen Voraussetzungen sind (in unserer Schreibweise) die folgenden: Sei E ein Banachraum, X eine Teilmenge von E, die darstellbar ist als endliche Vereinigung $X = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ abgeschlossener konvexer Teilmengen C_j von E, $\Omega \subseteq X$ offen in X und beschränkt und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow X$ ein stetiger Operator. Gelte weiter $\|x - Fx\| \geq \geq \delta$ für ein $\delta>0$ und alle $x \in \dot{\Omega}$ und sei $\gamma(F(\Omega)) < \delta$. Dann existiert ein kompakter stetiger Operator $G: \overline{\Omega} \dashrightarrow X$ derart, daß gilt:

a) für alle $x \in \overline{\Omega}$ ist $\|Fx - Gx\| < \delta$ und

b) ist $Fx \in C_j$, so ist auch $Gx \in C_j$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Wegen der Fixpunktfreiheit von G auf $\dot{\Omega}$ ist dann der Fixpunktindex $i_X(G,\Omega)$ (vgl. [4], [16], [30]) von G bzgl. Ω definiert; da diese Zahl weder von der Überdeckung $\{C_1,\ldots,C_n\}$ noch von der Wahl des kompakten Operators G abhängt, ist es sinnvoll, sie als "approximativen Fixpunktindex" $i_X(F,\Omega)$ von F bzgl. Ω zu bezeichnen (vgl. [34]). Falls wir dieses Konzept noch etwas verschärfen, indem wir

statt a) fordern

a)' für alle $x \in \overline{\Omega}$ ist $\|Fx - Gx\| < \eta$ mit $0 < 2\eta < \delta + \gamma(F(\Omega))$,

so läßt sich ein einfacher Zusammenhang mit Definition 3.1 herstellen:

3.5. Lemma: Gehört F zu der in [34] eingeführten Operatorenklasse, so ist F auf $\overline{\Omega}$ approximierbar. Unter der Bedingung a)' ist die Rotation $\gamma(\Phi,\Omega)$ von $\Phi = I-F$ auf Ω definiert und es gilt

$$\gamma(\Phi,\Omega) = i_X(F,\Omega). \tag{37}$$

Beweis: Da F auf $\overline{\Omega}$ stetig ist, ist $\overline{F(\overline{\Omega})} = \overline{F(\Omega)}$, also

$$\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \chi(F(\overline{\Omega})) = \chi(\overline{F(\overline{\Omega})}) = \chi(\overline{F(\Omega)}) = \tag{38}$$

$$= \chi(F(\Omega)) \leq \gamma(F(\Omega)) < \infty,$$

so daß F auf $\overline{\Omega}$ approximierbar ist. Weiter ist wegen

$$\alpha_0(F,\overline{\Omega}) \leq \gamma(F(\Omega)) < \delta \leq \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|x - Fx\| = \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|\Phi x\| \tag{39}$$

die Rotation $\gamma(\Phi,\Omega)$ definiert. Sei nun $G: \overline{\Omega} \dashrightarrow X$ kompakt und stetig mit $\|Fx - Gx\| < \eta$ für $x \in \overline{\Omega}$. Dann ist nach Definition des approximativen Fixpunktindex' einerseits

$$i_X(F,\Omega) = i_X(G,\Omega) \tag{40}$$

und nach Definition des klassischen Fixpunktindex' andererseits

$$i_X(G,\Omega) = \deg_{LS}(\Psi,\Omega,o) \tag{41}$$

($\Psi = I-G$). Wegen der Kompaktheit und Stetigkeit von G auf $\overline{\Omega}$ existiert nun ein endlichdimensionaler stetiger Operator $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ mit

$$\|Gx - F_1x\| < \frac{\delta + \gamma(F(\Omega))}{2} - \eta \tag{42}$$

für $x \in \overline{\Omega}$, und wegen

$$\inf_{x \in \dot{\Omega}_1} \|\Phi_1 x\| > 0 \tag{43}$$

($\Omega_1 = \Omega \cap E_1$, $\Phi_1 = I - F_1$) ist

$$\deg_{LS}(\Psi, \Omega, o) = \deg_B(\Phi_1 \big|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, o). \tag{44}$$

Schließlich ist wegen

$$\|Fx - F_1 x\| \leq \|Fx - Gx\| + \|Gx - F_1 x\| < \frac{\delta + \gamma(F(\Omega))}{2} \tag{45}$$

und

$$\alpha_0(F, \overline{\Omega}) \leq \gamma(F(\overline{\Omega})) < \frac{\delta + \gamma(F(\Omega))}{2} < \delta \leq \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|\Phi x\| \tag{46}$$

nach Definition 3.1

$$\deg_B(\Phi_1 \big|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, o) = \deg(\Phi, \Omega, o) = \gamma(\Phi, \Omega). \square \tag{47}$$

Die unästhetische Verschärfung von a) in a)' kann man dadurch umgehen, daß man die Definition der Approximierbarkeit etwas anders faßt: Wir nennen einen Operator $F: M \dashrightarrow E$ auf einer beschränkten Teilmenge "kompakt approximierbar", falls es ein $\varepsilon > 0$ und einen kompakten stetigen Operator $G: M \dashrightarrow E$ gibt mit $\|Fx - Gx\| < \varepsilon$ für alle $x \in M$; bezeichnen wir dann die untere Grenze aller dieser ε mit $\alpha'(F, M)$, so ist offensichtlich

$$\alpha'(F, M) = \alpha_1(F, M), \tag{48}$$

denn jeder kompakte Operator läßt sich durch einen beschränkten endlichdimensionalen Operator beliebig gut approximieren, und jeder beschränkte endlichdimensionale Operator ist selbst kompakt. Ist nun $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt, $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ kompakt approximierbar, $\Phi = I - F$ und

(49) $$\inf_{x\in\dot{\Omega}} \|\Phi x\| > \alpha'(F,\overline{\Omega}),$$

so kann man eine Rotation von Φ auf Ω ähnlich wie in 3.1 durch

(50) $$\gamma'(\Phi,\Omega) = \deg_{LS}(\Psi,\Omega,o)$$

(Ψ = I-G) definieren. Man erhält dann direkt folgendes Resultat:

3.6. Lemma: Sei F wie auf S. 31 gegeben (mit a) und b)). Dann ist die Rotation $\gamma'(\Phi,\Omega)$ definiert und es gilt

(51) $$\gamma'(\Phi,\Omega) = i_X(F,\Omega).$$

Beweis: Nach Lemma 2.2 und (48) ist

(52) $$\alpha'(F,\overline{\Omega}) = \alpha_1(F,\overline{\Omega}) = \chi(F(\overline{\Omega})) \leq$$

$$\leq \gamma(F(\Omega)) < \delta \leq \inf_{x\in\dot{\Omega}} \|\Phi x\|,$$

so daß die Rotation $\gamma'(\Phi,\Omega)$ definiert ist. Die Gleichheit (51) wird wie in Lemma 3.5 (ohne den Umweg über endlich-dimensionale Operatoren) bewiesen.□

§ 4. EIGENSCHAFTEN DES ABBILDUNGSGRADES

Die folgenden Lemmata 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.7, 4.10 und 4.12 übertragen (sowohl in der Aussage als auch in der Beweisidee) bekannte Ergebnisse aus der Leray-Schauder-Theorie auf die Klasse der approximierbaren Operatoren.

4.1. Lemma: (Normalität) Ist $x_0 \in \Omega$ fest und $F: \overline{\Omega} \longrightarrow E$ die konstante Abbildung $Fx = x_0$, so ist $\gamma(\Phi,\Omega) = 1$.

Beweis: Da nach Lemma 2.5 einerseits $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = 0$ und wegen $x_0 \in \Omega$ andererseits $\inf_{x \in \dot{\Omega}} \|\Phi x\| = \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|x - x_0\| > 0$ ist, ist $\gamma(\Phi,\Omega)$ definiert. Mit $E_1 = \mathrm{sp}\,\{x_0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap E_1$, $F_1 = F$ und $\Phi_1 = \Phi$ ergibt sich dann

$$\gamma(\Phi,\Omega) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, 0) = 1. \quad (1)$$ □

4.2. Lemma: (Stetigkeit im Punktargument) Ist $F: \overline{\Omega} \longrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und $y_0 \in Z(F,\overline{\Omega})$, so ist auch $y \in Z(F,\overline{\Omega})$ für alle $y \in E$ mit

$$\|y - y_0\| < \mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}), y_0) - \alpha_0(F,\overline{\Omega}), \quad (2)$$

und es ist $\deg(\Phi,\Omega,y) = \deg(\Phi,\Omega,y_0)$ für diese y.

Beweis: Wäre $y \notin Z(F,\overline{\Omega})$, so wäre $\mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega})$, also

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y_0) &\leq \mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) + \|y - y_0\| \leq \\ &\leq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \|y - y_0\| < \mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Ist jetzt $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) < \varepsilon < \min\{\mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y), \mathrm{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y_0)\}$ und $F_1: \overline{\Omega} \longrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für $x \in \overline{\Omega}$, so ist

(4) $\deg(\Phi,\Omega,y) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y)$

und

(5) $\deg(\Phi,\Omega,y_0) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y_0)$.

Es gilt aber

(6) $\|y - y_0\| < \operatorname{dist}(\Phi_1(\dot{\Omega}_1),y_0)$,

denn andernfalls wäre $\|y - y_0\| \geq \operatorname{dist}(\Phi_1(\dot{\Omega}_1),y_0) \geq$
$\geq \operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}_1),y_0) - \varepsilon \geq \operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y_0) - \varepsilon$, also auch $\|y - y_0\| \geq$
$\geq \operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y_0) - \alpha_0(F,\overline{\Omega})$ im Widerspruch zu (2). Aus (6) folgt aber

(7) $\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y_0)$.□

4.3. Lemma: (Additivität im Mengenargument) Seien $\Omega_1,\ldots,\Omega_k$ paarweise disjunkte, offene und beschränkte Teilmengen von Ω, sei $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und gelte

(8) $\operatorname{dist}(\Phi(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q),y) > \alpha_0(F,\overline{\Omega})$.

Dann sind die Grade $\deg(\Phi,\Omega,y)$ und $\deg(\Phi,\Omega_q,y)$ $(q = 1,\ldots,k)$ definiert, und es gilt

(9) $\deg(\Phi,\Omega,y) = \sum_{q=1}^{k} \deg(\Phi,\Omega_q,y)$.

Beweis: Zunächst ist $\deg(\Phi,\Omega,y)$ definiert, da $\dot{\Omega} \subseteq$
$\subseteq \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q$ und daher $\operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) \geq \operatorname{dist}(\Phi(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q),y)$ ist.

Weiter ist $\deg(\Phi,\Omega_q,y)$ definiert, da einerseits $\dot{\Omega}_q \subseteq$
$\subseteq \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q$ und daher $\operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}_q),y) \geq \operatorname{dist}(\Phi(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q),y)$ und

und andererseits $\overline{\Omega}_q \subseteq \overline{\Omega}$ und daher $\alpha_0(F,\overline{\Omega}_q) \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega})$ ist. Ist nun $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Phi(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q), y)$ und $F_1\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für $x \in \overline{\Omega}$, so gilt für $\Omega_{q1} := \Omega_q \cap E_1$

$$\deg(\Phi,\Omega_q,y) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_{q1}},\Omega_{q1},y) \tag{10}$$

und für $\Omega_1 := \Omega \cap E_1$

$$\deg(\Phi,\Omega,y) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y). \tag{11}$$

Schließlich folgt aus $\operatorname{dist}(\Phi_1(\overline{\Omega}_1 \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_{q1}),y) > 0$

$$\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) = \sum_{q=1}^{k} \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_{q1}},\Omega_{q1},y). \tag{12}$$ □

4.4. Definition: Seien $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ und $G\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ zwei auf $\overline{\Omega}$ approximierbare Operatoren. Einen Operator $H\colon [0,1]\times\overline{\Omega} \dashrightarrow E$ nennen wir eine (F und G verbindende) Homotopie, falls H auf $[0,1]\times\overline{\Omega}$ approximierbar ist und falls $H(0,x) = Fx$ und $H(1,x) = Gx$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt. Die Operatoren F und G nennen wir dann approximierbar homotop auf $\overline{\Omega}$. □

4.5. Lemma: (Homotopieinvarianz im Operatorenargument) Seien $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ und $G\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und sei $H\colon [0,1]\times\overline{\Omega} \dashrightarrow E$ eine F und G verbindende Homotopie. Weiter gelte für ein $y \in E$

$$\operatorname{dist}(\Xi([0,1]\times\dot{\Omega}),y) > \alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega}) \tag{13}$$

($\Xi = I-H$). Dann sind die Grade $\deg(\Phi,\Omega,y)$ und $\deg(\Psi,\Omega,y)$ definiert ($\Phi = I-F$, $\Psi = I-G$) und einander gleich.

Beweis: Zunächst sind die Grade $\deg(\Phi,\Omega,y)$ und $\deg(\Psi,\Omega,y)$ definiert, da einerseits $\Phi(\dot{\Omega}) \cup \Psi(\dot{\Omega}) \subseteq \Xi([0,1]\times\dot{\Omega})$ und daher $\min\{\operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y), \operatorname{dist}(\Psi(\dot{\Omega}),y)\} \geq \operatorname{dist}(\Xi([0,1]\times\dot{\Omega}),y)$ und andererseits $\{0\}\times\overline{\Omega} \cup \{1\}\times\overline{\Omega} \subseteq [0,1]\times\overline{\Omega}$ und daher $\alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega}) \geq$ $\geq \max\{\alpha_0(F,\overline{\Omega}), \alpha_0(G,\overline{\Omega})\}$ ist. Ist nun $\alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega}) < \varepsilon <$ $< \operatorname{dist}(\Xi([0,1]\times\dot{\Omega}),y)$ und $H_1\colon [0,1]\times\overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|H(t,x) - H_1(t,x)\| < \varepsilon$ für $(t,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}$, so gilt für jedes $t\in[0,1]$

$$\deg(\Xi(t,\cdot),\Omega,y) = \deg_B(\Xi_1(t,\cdot)\big|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) \tag{14}$$

($\Omega_1 = \Omega \cap E_1$, $\Xi_1 = I - H_1$), und beide auftretenden Grade sind wegen $\operatorname{dist}(\Xi(t,\dot{\Omega}),y) \geq \operatorname{dist}(\Xi([0,1]\times\dot{\Omega}),y)$ und $\alpha_0(H(t,\cdot),\overline{\Omega}) \leq$ $\leq \alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega})$ definiert. Darüberhinaus hat der rechtsstehende Brouwer-Grad für alle $t\in[0,1]$ denselben Wert; mit $\Phi_1 = \Xi_1(0,\cdot)$ und $\Psi_1 = \Xi_1(1,\cdot)$ ergibt sich insbesondere

$$\deg_B(\Phi_1\big|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) = \deg_B(\Psi_1\big|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y).\square \tag{15}$$

4.6. Bemerkung: In der Mehrzahl der Anwendungen, bei denen Homotopieschlüsse eine Rolle spielen, werden lineare Homotopien der Form $H(t,x) = (1-t)Fx + tGx$ benutzt (vgl. auch 5.2, 5.3 und 5.4). Homotopien dieser Form sind stets approximierbar, da hierbei

$$\alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega}) = \max\{\alpha_0(F,\overline{\Omega}), \alpha_0(G,\overline{\Omega})\} \tag{16}$$

gilt: Ist nämlich $\varepsilon_H > \alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega})$ und $H_1\colon [0,1]\times\overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional und stetig mit $\|H(t,x) - H_1(t,x)\| < \varepsilon_H$ für $(t,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}$, so gilt für $F_1 = H_1(0,\cdot)$ einerseits $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon_H$ und für $G_1 = H_1(1,\cdot)$ andererseits $\|Gx - G_1x\| < \varepsilon_H$

$(x\in\overline{\Omega})$. Erfüllen umgekehrt zwei endlichdimensionale stetige Operatoren $F_1\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E_{1F}$ und $G_1\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E_{1G}$ die Abschätzungen $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon_F$ bzw. $\|Gx - G_1x\| < \varepsilon_G$ $(\varepsilon_F > \alpha_0(F,\overline{\Omega}),\ \varepsilon_G > \alpha_0(G,\overline{\Omega}))$ für $x\in\overline{\Omega}$, so genügt der durch $H_1(t,x) = (1-t)F_1x + tG_1x$ definierte Operator $H_1\colon [0,1]\times\overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ $(E_1 = E_{1F}+E_{1G})$ der Abschätzung

$$(17)\qquad \|H(t,x) - H_1(t,x)\| < (1-t)\varepsilon_F + t\varepsilon_G \le \max\{\varepsilon_F, \varepsilon_G\}$$

für $(t,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}$.□

4.7. Lemma: (Ausschneidungseigenschaft) Sei $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$, $y\in E$ und $\Omega' \subseteq \Omega$ abgeschlossen mit

$$(18)\qquad \operatorname{dist}(\Phi(\mathring{\Omega} \cup \Omega'),y) > \alpha_0(F,\overline{\Omega}).$$

Dann sind die Grade $\deg(\Phi,\Omega,y)$ und $\deg(\Phi,\Omega\setminus\Omega',y)$ definiert und einander gleich.

Beweis: Setzen wir $\Omega_1 := \Omega\setminus\Omega'$ und $\Omega_2 := \mathring{\Omega}'$, so gilt wegen $\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathring{\Omega} \cup \mathring{\Omega}' \subseteq \mathring{\Omega} \cup \Omega'$

$$(19)\qquad \operatorname{dist}(\Phi(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1 \cup \Omega_2)),y) \ge$$
$$\ge \operatorname{dist}(\Phi(\mathring{\Omega} \cup \Omega'),y) > \alpha_0(F,\overline{\Omega}).$$

Nach Lemma 3.7 sind also die Grade $\deg(\Phi,\Omega,y)$, $\deg(\Phi,\Omega\setminus\Omega',y)$ und $\deg(\Phi,\mathring{\Omega}',y)$ definiert und es ist

$$(20)\qquad \deg(\Phi,\Omega,y) = \deg(\Phi,\Omega\setminus\Omega',y) + \deg(\Phi,\mathring{\Omega}',y).$$

Wäre nun $\deg(\Phi,\mathring{\Omega}',y) \neq 0$, so wäre nach Satz 3.2

$$(21)\qquad \alpha_0(F,\overline{\Omega}) \ge \alpha_0(F,\Omega') \ge \operatorname{dist}(\Phi(\Omega'),y) \ge \operatorname{dist}(\Phi(\mathring{\Omega} \cup \Omega'),y)$$

im Widerspruch zu (18).□

4.8. Definition: Sei $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$. Ein Punkt $\hat{x}\in\overline{\Omega}$ heiße Approximationspunkt von F in $\overline{\Omega}$, falls

(22) $$\|\hat{x} - F\hat{x}\| \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega})$$

ist. Ein Approximationspunkt $\hat{x}\in\overline{\Omega}$ heiße <u>isoliert</u>, falls es Zahlen $\rho>0$ und $\delta>0$ gibt derart, daß

(23) $$\|x - Fx\| \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta$$

für alle $x\in\overline{\Omega} \cap K(\hat{x},\rho) \setminus \{\hat{x}\}$ gilt.□

Sei $\hat{x}$ ein isolierter Approximationspunkt von $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ und sei $o\in Z(F,\overline{\Omega})$. Seien weiter Zahlen $\delta>0$ und $\hat{\rho}>0$ so gewählt, daß $B(\hat{x},\hat{\rho}) \subseteq \Omega$ und $\|x - Fx\| \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta$ für $x\in K(\hat{x},\hat{\rho}) \setminus \{\hat{x}\}$ ist. (Die erste Bedingung ist wegen $o\in Z(F,\overline{\Omega})$ erfüllbar.) Wegen

(24) $$\inf\{\|\Phi x\| \mid x\in S(\hat{x},\hat{\rho})\} \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta >$$

$$> \alpha_0(F,\overline{\Omega}) \geq \alpha_0(F,K(\hat{x},\hat{\rho}))$$

ist die Rotation $\gamma(\Phi,B(\hat{x},\hat{\rho}))$ von $\Phi = I-F$ auf $B(\hat{x},\hat{\rho})$ definiert. Ist nun $0<\tilde{\rho}<\hat{\rho}$ und setzen wir $\Omega_0 = B(\hat{x},\hat{\rho})$, $\Omega_1 = B(\hat{x},\tilde{\rho})$ und $\Omega_2 = B(\hat{x},\hat{\rho}) \setminus K(\hat{x},\tilde{\rho})$, so gilt wegen $\overline{\Omega}_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = S(\hat{x},\hat{\rho}) \cup S(\hat{x},\tilde{\rho})$

(25) $$\inf\{\|\Phi x\| \mid x\in\overline{\Omega}_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\} \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta \geq$$

$$\geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}_0) + \delta > \alpha_0(F,\overline{\Omega}_0).$$

Nach Lemma 3.7 sind also die Rotationen $\gamma(\Phi,\Omega_i)$ $(i = 0,1,2)$ definiert und es ist

(26) $$\gamma(\Phi,\Omega_0) = \gamma(\Phi,\Omega_1) + \gamma(\Phi,\Omega_2).$$

Nun ist aber offensichtlich $\gamma(\Phi,\Omega_2) = 0$, da $\hat{x}$ isolierter Approximationspunkt von F in $\overline{\Omega}_0$ war. Es gilt also

(27) $$\gamma(\Phi,B(\hat{x},\hat{\rho})) = \gamma(\Phi,B(\hat{x},\tilde{\rho})).$$

4.9. Definition: Die (wegen (27) von $\hat{\rho}$ unabhängige) Rotation von $\Phi = I-F$ auf $B(\hat{x},\hat{\rho})$ heiße der Index $\mathrm{ind}(\hat{x},F)$ des Approximationspunktes $\hat{x}$ bzgl. des approximierbaren Operators F (vgl. [35], S. 21).□

4.10. Lemma: (Indexsummensatz) Sei $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und sei $o \in Z(F,\overline{\Omega})$. Ferner habe F in Ω endlich viele Approximationspunkte $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_k$, die alle isoliert seien. Dann gilt für $\Phi = I-F$

$$\gamma(\Phi,\Omega) = \mathrm{ind}(\hat{x}_1,F) + \ldots + \mathrm{ind}(\hat{x}_k,F). \tag{28}$$

Beweis: Seien wieder Zahlen $\delta>0$ und $\hat{\rho}_1,\ldots,\hat{\rho}_k>0$ so gewählt, daß $B(\hat{x}_q,\hat{\rho}_q) \subseteq \Omega$ und $\|x - Fx\| \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta$ für $x \in K(\hat{x}_q,\hat{\rho}_q) \setminus \{\hat{x}_q\}$ $(q = 1,\ldots,k)$ ist. Mit $\Omega_q := B(\hat{x}_q,\hat{\rho}_q)$ folgt dann wegen

$$\inf\{\|\Phi x\| \mid x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{q=1}^{k} \Omega_q\} > \alpha_0(F,\overline{\Omega}) \tag{29}$$

aus Lemma 3.7 die Behauptung.□

4.11. Beispiel: Sei E ein beliebiger unendlichdimensionaler Banachraum, $\Omega = B(o,\rho_2) \setminus K(o,\rho_1)$ $(0<\rho_1<\rho_2)$, $\hat{x} \in \Omega$ fest und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ definiert durch

$$Fx = \begin{cases} -\rho_2 \dfrac{x}{\|x\|} & \text{falls } x \notin \{\hat{x},-\hat{x}\}, \\ +\rho_2 \dfrac{x}{\|x\|} & \text{falls } x \in \{\hat{x},-\hat{x}\}. \end{cases} \tag{30}$$

Dann ist $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \rho_2$, und $\hat{x}$ und $-\hat{x}$ sind Approximationspunkte von F in $\overline{\Omega}$, da für $x \in \{\hat{x},-\hat{x}\}$

$$\|x - Fx\| = \|x - \rho_2 \frac{x}{\|x\|}\| = \tag{31}$$

$$= \rho_2 - \|\hat{x}\| \leq \rho_2 - \rho_1 < \rho_2$$

gilt. Beide Approximationspunkte sind isoliert, denn es gilt sogar für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}, -\hat{x}\}$

$$\|x - Fx\| = \|x + \rho_2 \frac{x}{\|x\|}\| = \tag{32}$$

$$= \rho_2 + \|x\| \geq \rho_2 + \rho_1 > \rho_2,$$

so daß wir etwa $0 < \hat{\rho} < \min\{\rho_2 - \|\hat{x}\|, \|\hat{x}\| - \rho_1\}$ und $0 < \delta < \rho_1$ wählen können. Aus Lemma 3.4 folgt weiter, daß

$$\gamma(\Phi, \Omega) = 0 \tag{33}$$

($\Phi = I - F$) ist; also ist nach Lemma 4.10

$$\operatorname{ind}(\hat{x}, F) = -\operatorname{ind}(-\hat{x}, F). \tag{34}$$

Wählt man etwa $E_1 = \operatorname{sp}\{\hat{x}\}$ und $\Omega_1 = B(\hat{x}, \hat{\rho}) \cap E_1$ bzw. $\Omega_1 = B(-\hat{x}, \hat{\rho}) \cap E_1$ sowie $F_1 x := F\hat{x}$ für $x \in \overline{\Omega}_1$, so erhält man genauer, daß

$$\operatorname{ind}(\hat{x}, F) = \operatorname{ind}(-\hat{x}, F) = 0 \tag{35}$$

ist.□

Wir zeigen nun noch, daß der Grad multiplikativ in allen Argumenten ist. Seien dazu E_1 und E_2 zwei Banachräume, $y_1 \in E_1$ und $y_2 \in E_2$ zwei beliebige Punkte und $\Omega_1 \subseteq E_1$ und $\Omega_2 \subseteq E_2$ zwei beschränkte und (in E_1 bzw. E_2) offene Mengen. Seien ferner $F_1\colon \overline{\Omega}_1 \dashrightarrow E_1$ und $F_2\colon \overline{\Omega}_2 \dashrightarrow E_2$ zwei (auf $\overline{\Omega}_1$ bzw. $\overline{\Omega}_2$) approximierbare Operatoren und sei $\Phi_1 = I - F_1$, $\Phi_2 = I - F_2$. Setzen wir dann $E = E_1 \times E_2$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $y = (y_1, y_2)$ und $F(x_1, x_2) = (F_1 x_1, F_2 x_2)$ für $x_1 \in \overline{\Omega}_1$ und $x_2 \in \overline{\Omega}_2$ sowie $\Phi = I - F$, so ist Φ ein Vektorfeld auf $\overline{\Omega}$ mit Werten in E. (Wir erinnern daran, daß die hier auftretenden verschiedenen topologischen Hüllen- und Randbildungen über die Beziehungen $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$

und $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_1 \times \dot{\Omega}_2$ zusammenhängen; der Raum E sei dabei mittels $|||(x_1,x_2)||| = \max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$ normiert.)

4.12. Lemma: (Multiplikativität in allen Argumenten) Seien die obenstehenden Voraussetzungen an E_i, Ω_i, y_i, F_i und Φ_i erfüllt, und ebenso die Abschätzungen

(36) $$\operatorname{dist}(\Phi_i(\dot{\Omega}_i),y_i) > \alpha_0(F_i,\overline{\Omega}_i)$$

und

(37) $$\operatorname{dist}(\Pi_1 \cup \Pi_2,(y_1,y_2)) > \alpha_0(F_i,\overline{\Omega}_i)$$

(i = 1,2), wo $\Pi_1 = \Phi_1(\dot{\Omega}_1)\times\Phi_2(\overline{\Omega}_2)$ und $\Pi_2 = \Phi_1(\overline{\Omega}_1)\times\Phi_2(\dot{\Omega}_2)$ sei. Dann ist F auf $\overline{\Omega}$ approximierbar und es gilt

(38) $$\alpha_0(F,\overline{\Omega}) \le \max\{\alpha_0(F_1,\overline{\Omega}_1),\alpha_0(F_2,\overline{\Omega}_2)\}.$$

Ferner sind die Grade $\deg(\Phi_1,\Omega_1,y_1)$, $\deg(\Phi_2,\Omega_2,y_2)$ und $\deg(\Phi,\Omega,y)$ erklärt und es gilt

(39) $$\deg(\Phi,\Omega,y) = \deg(\Phi_1,\Omega_1,y_1)\deg(\Phi_2,\Omega_2,y_2).$$

Beweis: Sei $\alpha_0(F_i,\overline{\Omega}_i) < \varepsilon_i < \operatorname{dist}(\Phi_i(\dot{\Omega}_i),y_i)$ und sei $F_{i1}\colon \overline{\Omega}_i \dashrightarrow E_{i1}$ endlichdimensional und stetig mit $\|F_ix_i - F_{i1}x_i\| < \varepsilon_i$ für $x_i \in \overline{\Omega}_i$ (i = 1,2). Für den durch $F_1'(x_1,x_2) = (F_{11}x_1,F_{21}x_2)$ erklärten Operator $F_1'\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1'$ ($E_1' = E_{11}\times E_{21}$) gilt dann

(40) $$|||F(x_1,x_2) - F_1'(x_1,x_2)||| =$$

$$= \max\{\|F_1x_1 - F_{11}x_1\|,\|F_2x_2 - F_{21}x_2\|\} < \max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

was den ersten Teil der Behauptung beweist.

Da $\Pi_1 \cup \Pi_2 = \Phi(\dot{\Omega}_1\times\overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_1\times\dot{\Omega}_2) = \Phi(\dot{\Omega})$ ist, folgt aus dem soeben Bewiesenen weiter

(41) $$\operatorname{dist}(\Phi(\dot{\Omega}),y) > \alpha_0(F,\overline{\Omega}),$$

so daß $\deg(\Phi,\Omega,y)$ erklärt ist; die Existenz der Grade $\deg(\Phi_1,\Omega_1,y_1)$ und $\deg(\Phi_2,\Omega_2,y_2)$ folgt sofort aus (36). Definieren wir F_{11}, F_{21} und F_1' wie oben und setzen wir $\Omega_{11} = \Omega_1 \cap E_{11}$, $\Omega_{21} = \Omega_2 \cap E_{21}$ und $\Omega_1' = \Omega \cap E_1'$, so ist nach der Produkteigenschaft des Brouwer-Grades

(42) $\deg_B(\Phi_1'|_{\overline{\Omega}_1'},\Omega_1',y) = \deg_B(\Phi_{11}|_{\overline{\Omega}_{11}},\Omega_{11},y_1)\deg_B(\Phi_{21}|_{\overline{\Omega}_{21}},\Omega_{21},y_2)$

($\Phi_1' = I-F_1'$, $\Phi_{11} = I-F_{11}$, $\Phi_{21} = I-F_{21}$), woraus der letzte Teil der Behauptung folgt.□

§ 5. DIE MINIMALE VERSCHIEBUNG

In diesem Abschnitt untersuchen wir die minimale Verschiebung

$$(1) \qquad \eta(F,M) = \inf_{x \in M} \|x - Fx\|,$$

die ein Operator $F: M \dashrightarrow E$ auf einer beschränkten Teilmenge M eines Banachraums E bewirkt. Aus der Fixpunkttheorie nichtkompakter Operatoren sind folgende Resultate bekannt (vgl. [6], [48], [35] und [10]):

1.) Ist M abgeschlossen, beschränkt und konvex und $F: M \dashrightarrow M$ stetig und strikt χ-kondensierend auf M, so hat F einen Fixpunkt in M, also ist insbesondere

$$(2) \qquad \eta(F,M) = 0.$$

2.) Ist M abgeschlossen, beschränkt und konvex und $F: M \dashrightarrow M$ stetig und χ-kondensierend auf M, so hat F einen Fixpunkt in M, also ist insbesondere

$$(3) \qquad \eta(F,M) = 0.$$

3.) Ist M abgeschlossen, beschränkt und konvex und $F: M \dashrightarrow M$ stetig und χ-nichtexpansiv auf M, so muß F zwar keinen Fixpunkt in M haben, es gilt aber trotzdem

$$(4) \qquad \eta(F,M) = 0.$$

Da die Menge $\Phi(M)$ ($\Phi = I-F$) für stetiges χ-kondensierendes F stets abgeschlossen ist, enthält die Gleichheit (4) die Fixpunktaussagen unter 1.) und 2.) als Spezialfälle. Als Beispiel eines fixpunktfreien stetigen χ-nichtexpansiven Operators F auf einer abgeschlossenen, beschränkten und konvexen

Menge M kann der Operator

$$[Fx](t) = tx(t) \qquad (0 \le t \le 1) \tag{5}$$

auf der Menge $M = \{x \mid x \in E, 0 = x(0) \le x(t) \le x(1) = 1\}$ im Banachraum $E = C(0,1)$ dienen: Die Nullfunktion $x = o$ ist offensichtlich der einzige Fixpunkt von F in E, liegt aber nicht in M. Andererseits gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Funktion $x_\delta \in M$ mit $\|x_\delta - Fx_\delta\| < \delta$, etwa

$$x_\delta(t) = \frac{\delta t}{1-(1-\delta)t}. \tag{6}$$

4.) Ist M abgeschlossen, beschränkt und konvex und $F: M \longrightarrow M$ ein stetiger χ-Lipschitz-Operator mit $\chi(F) \ge 1$, so ist

$$\eta(F,M) \le [1-1/\chi(F)]\gamma(M), \tag{7}$$

wo $\gamma(M)$ das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß der Menge M bezeichnet, d. h. die untere Grenze aller solchen $\delta > 0$, für die eine endliche Überdeckung von M mit Mengen vom Durchmesser $\le \delta$ existiert.

Wie Furi und Martelli in [11] zeigten, ist die Abschätzung (7) für einen stetigen χ-Lipschitz-Operator mit $\chi(F) \ge 1$ auch dann noch gültig, wenn M darstellbar ist als endliche Vereinigung von abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Mengen, falls die Lefschetzzahl $\Lambda(F)$ von F (vgl. [24]) definiert und verschieden von Null ist. Daß (7) für beliebige Mengen M nicht mehr gilt, zeigt schon das vierte Beispiel in 3.3 (S. 28): Dort ist $\chi(F) = 1$ und $\gamma(\overline{\Omega}) = 2\rho_2$, aber $\eta(F,\overline{\Omega}) = 2\rho_1 > 0$. Allerdings genügt dieser Operator wegen $\rho_1 < \rho_2$ der schwächeren Abschätzung

(8) $$\eta(F,\overline{\Omega}) \leq \gamma(\overline{\Omega}).$$

Daher stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen für einen beliebigen Operator $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow \overline{\Omega}$ ($\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt) zumindest die Abschätzung (8) gilt.

5.1. Satz: Sei $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow \overline{\Omega}$ stetig, beschränkt und approximierbar auf $\overline{\Omega}$. Ist dann $\gamma(\Phi,\Omega)$ definiert ($\Phi = I-F$) und verschieden von Null, so gilt (8).

Beweis: Aus Satz 3.2 folgt einerseits

(9) $$\eta(F,\overline{\Omega}) \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega}),$$

aus Lemma 2.2, der Monotonie von χ und der trivialen Beziehung $\chi(M) \leq \gamma(M)$ folgt andererseits

(10) $$\alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \chi(F(\overline{\Omega})) \leq \chi(\overline{\Omega}) \leq \gamma(\overline{\Omega}).\square$$

Es ist zu bemerken, daß das Nichtverschwinden der Lefschetzzahl nicht das Nichtverschwinden der Rotation nach sich zieht; so ist beispielsweise $\gamma(\Phi,\Omega) = 0$ im vierten Beispiel in 3.3, aber $\Lambda(F) = 1$. Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen der Lefschetzzahl und der Rotation im Sinne von Definition 3.1 ist uns nicht bekannt.

Im sechsten Abschnitt werden wir eine Verallgemeinerung der Abschätzung (7) für den Fall eines stetigen Operators in einem lokalkonvexen Raum beweisen (vgl. 6.10).

Ist $\Omega \subseteq E$ offen und beschränkt und $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$, so ist nach Satz 3.2 das Nichtverschwinden der Rotation $\gamma(\Phi,\Omega)$ hinreichend für das Bestehen der Abschätzung

(11) $$\eta(F,\overline{\Omega}) \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega}).$$

Die folgenden drei Lemmata, die das Nichtverschwinden der Rotation von Φ auf Ω sichern (und damit die Gültigkeit von (11)), stellen Analoga bekannter Sätze von Schaefer, Leray und Borsuk dar (vgl. z. B. [7], S. 69, 72 und 85).

5.2. Lemma: Sei $\Omega = B(o,\rho) \subset E$ $(\rho>0)$ und $F: \overline{\Omega} \longrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$. Es gebe ein $\delta>0$ derart, daß die Menge

$$P_\delta = \{x \mid x \in \overline{\Omega}, \text{ es gibt ein } \lambda \in [0,1[\text{ mit } \|x - \lambda Fx\| < \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta\} \tag{12}$$

beschränkt ist durch eine Konstante $\mu<\rho$. Dann gilt die Abschätzung (11).

Beweis: Wir zeigen, daß ein $x_\delta \notin \overline{\Omega}$ existiert mit

$$\|\Phi x_\delta\| < \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta \tag{13}$$

($\Phi = I-F$); da für jedes $\delta'<\delta$ die entsprechende Menge $P_{\delta'}$ auch durch μ beschränkt ist, ist damit die Behauptung bewiesen. Sei $H: [0,1]\times\overline{\Omega} \longrightarrow E$ definiert durch $H(t,x) = tFx$. Ist

$$\|\Xi(1,x_\delta)\| < \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta \tag{14}$$

($\Xi = I-H$) für ein $x_\delta \in \mathring{\Omega}$, so ist (13) wegen $\Xi(1,\cdot) = \Phi$ bewiesen. Sei also o.B.d.A. $\|\Xi(1,x)\| \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta$ für alle $x \in \mathring{\Omega}$, also auch

$$\inf_{x\in\mathring{\Omega}} \|\Xi(1,x)\| \geq \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta > \alpha_0(F,\overline{\Omega}). \tag{15}$$

Für $0\leq t<1$ gilt ebenfalls $\inf_{x\in\mathring{\Omega}} \|\Xi(t,x)\| > \alpha_0(F,\overline{\Omega})$, denn andernfalls wäre

$$\|\Xi(\tilde{t},\tilde{x})\| < \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta \tag{16}$$

für ein $(\tilde{t},\tilde{x}) \in [0,1[\times\mathring{\Omega}$, also $\tilde{x} \in P_\delta$ im Widerspruch zu $\|\tilde{x}\| = \rho > \mu$. Damit ist H eine den Nulloperator und F verbindende approxi-

mierbare Homotopie mit

(17) $$\inf\{\|\Xi(t,x)\| \mid 0\le t\le 1,\ x\in\mathring{\Omega}\} > \alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega}),$$

woraus nach Lemma 4.5 die Gleichheit

(18) $$\gamma(\Phi,\Omega) = \gamma(I,\Omega) = 1$$

und damit nach Satz 3.2 die Existenz eines $x_\delta\in\overline{\Omega}$ mit (13) folgt.□

5.3. Lemma: Sei $\Omega = B(o,\rho) \subset E$ $(\rho>0)$ und $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$. Es gebe ein $\delta>0$ derart, daß aus der Ungleichheit

(19) $$\|x - \lambda Fx\| < \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta \qquad (x\in\mathring{\Omega})$$

die Beziehung $\lambda\ge 1$ folgt. Dann gilt die Abschätzung (11).

Beweis: Wir zeigen wieder die Existenz eines $x_\delta\in\overline{\Omega}$ mit (13). Wie im Beweis des vorigen Lemmas definieren wir H durch $H(t,x) = tFx$ und setzen o.B.d.A. $\|\Xi(1,x)\| \ge \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta$ für alle $x\in\mathring{\Omega}$ voraus; aus der Ungleichheit (19) folgt mithin sogar $\lambda>1$. Damit gilt aber wieder (17), denn andernfalls wäre

(20) $$\|\Xi(\tilde{t},\tilde{x})\| < \alpha_0(F,\overline{\Omega}) + \delta$$

für ein $(\tilde{t},\tilde{x})\in[0,1]\times\mathring{\Omega}$, also $\tilde{t}>1$. Es ist also wie oben

(21) $$\gamma(\Phi,\Omega) = \gamma(I,\Omega) = 1.$$□

5.4. Lemma: Sei $\Omega = B(o,\rho) \subset E$ $(\rho>0)$ und $F\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und ungerade $(F(-x) = -Fx)$ auf $\mathring{\Omega}$. Ist dann $\gamma(\Phi,\Omega)$ definiert, so ist $\gamma(\Phi,\Omega)$ eine ungerade Zahl, also insbesondere verschieden von Null, so daß die Abschätzung (11) gilt.

Beweis: Zunächst können wir annehmen, daß F sogar auf ganz $\overline{\Omega}$ ungerade ist: Definieren wir nämlich $\hat{F}\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E$

durch $\hat{F}x = \frac{1}{2}[Fx - F(-x)]$, so ist $\hat{F}$ ungerade auf $\overline{\Omega}$, stimmt auf $\dot{\Omega}$ mit F überein und erfüllt die Beziehung

$$\alpha_0(\hat{F},\overline{\Omega}) \leq \alpha_0(F,\overline{\Omega}), \tag{22}$$

so daß $\gamma(\hat{\Phi},\Omega)$ ($\hat{\Phi} = I-\hat{F}$) definiert ist. Weiter ist $H(t,x) = (1-t)Fx + t\hat{F}x$ eine F und $\hat{F}$ verbindende approximierbare Homotopie mit

$$\inf\{\|\Xi(t,x)\| \mid 0\leq t\leq 1,\ x\in\dot{\Omega}\} = \inf_{x\in\dot{\Omega}} \|\Phi x\| > \alpha_0(F,\overline{\Omega}) = \tag{23}$$

$$= \max\{\alpha_0(F,\overline{\Omega}),\ \alpha_0(\hat{F},\overline{\Omega})\} = \alpha_0(H,[0,1]\times\overline{\Omega})$$

($\Xi = I-H$), so daß $\gamma(\Phi,\Omega) = \gamma(\hat{\Phi},\Omega)$ ist. Sei nun $\alpha_0(F,\overline{\Omega}) < \varepsilon < \inf_{x\in\dot{\Omega}} \|\Phi x\|$ und $F_1\colon \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ stetig mit $\|Fx - F_1x\| < \varepsilon$ für alle $x\in\overline{\Omega}$. Auch F_1 kann auf $\overline{\Omega}_1$ ($\Omega_1 = \Omega \cap E_1$) als ungerade angesehen werden, da man sonst wieder statt F_1 den durch $\hat{F}_1x = \frac{1}{2}[F_1x - F_1(-x)]$ definierten Operator $\hat{F}_1\colon \overline{\Omega}_1 \dashrightarrow E_1$ betrachten kann, für den ebenfalls $\|Fx - \hat{F}_1x\| < \varepsilon$ gilt. Damit ist

$$\gamma(\Phi,\Omega) = \deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,o), \tag{24}$$

und der rechtsstehende Grad ist ungerade nach dem klassischen Antipodensatz von Borsuk.□

§ 6. APPROXIMIERBARE OPERATOREN IN LOKALKONVEXEN RÄUMEN

Vergegenwärtigt man sich die Begriffsbildungen und Schlußweisen der letzten Abschnitte, so stellt man fest, daß diese auf den Fall lokalkonvexer Räume übertragbar zu sein scheinen, wenn man an den wichtigsten Stellen die Normkugeln durch konvexe Umgebungen ersetzt. Es ist daher naheliegend, mit Hilfe eines Nullumgebungssystems T oder einer Halbnormfamilie Q eines lokalkonvexen Raums E gewissen Teilmengen M von E in ähnlicher Weise wie oben Nichtkompaktheits- und Approximationsmaße zuzuordnen. Das soll in diesem Abschnitt geschehen.

Sei E im folgenden stets ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit einem Nullumgebungssystem T, das durch eine Familie Q stetiger Halbnormen erzeugt wird (vgl. S. 13); die Menge A aller Abbildungen $a: Q \longrightarrow [0,\infty]$ sei mit der natürlichen Vektorraumstruktur ($[\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2](q) = \lambda_1 a_1(q)+\lambda_2 a_2(q)$) und der punktweisen Halbordnung ($a_1 \leq a_2$ bedeutet $a_1(q) \leq a_2(q)$ für alle $q \in Q$) versehen.

6.1. Definition: Für $M \subseteq E$ heißt die durch

(1) $[\chi(M)](q) := \inf\{\varepsilon \mid \varepsilon>0$, es existiert ein endliches ε-Netz von M in E bzgl. $q\}$

definierte (für beschränktes M endliche) Funktion $\chi(M) \in A$ das (Hausdorffsche) Nichtkompaktheitsmaß der Menge M. Einen Operator $F: M \longrightarrow E$ nennen wir χ-Lipschitz-Operator auf M, falls es ein $\lambda>0$ gibt mit

(2) $\chi(F(N)) \leq \lambda\chi(N)$

für alle $N \subseteq M$. In diesem Fall bezeichnen wir die untere Grenze aller $\lambda>0$ mit (2) als (Hausdorffsches) Nichtkompaktheitsmaß $\chi(F)$ des Operators F; Begriffe wie "strikt χ-kondensierend", "χ-kondensierend" und "χ-nichtexpansiv"definieren wir wie im ersten Abschnitt (S. 4/5).□

6.2. Lemma: Das Maß χ hat folgende Eigenschaften:

a) $\chi(M) = 0$ gilt genau für relativkompaktes M,

b) $\chi(M) < \infty$ gilt genau für beschränktes M,

c) es ist $\chi(\overline{co}\, M) = \chi(M)$,

d) aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $\chi(M_1) \leq \chi(M_2)$,

e) für jedes $\varepsilon>0$ und $q\in Q$ existiert ein $U\in\mathfrak{T}$ derart, daß $[\chi(M_1)](q) \leq [\chi(M_2)](q) + \varepsilon$ ist für $M_1 \subseteq M_2 + U$,

f) es ist $\chi(M_1+M_2) \leq \chi(M_1) + \chi(M_2)$ und $\chi(\rho M) = \rho\chi(M)$ $(\rho>0)$,

g) es ist $\chi(M_1 \cup M_2) = \max\{\chi(M_1),\chi(M_2)\}$ und $\chi(M_1 \cap M_2) \leq \leq \min\{\chi(M_1),\chi(M_2)\}$,

h) für kompaktes $F: M \dashrightarrow E$ ist $\chi(F) = 0$; die Umkehrung gilt, falls M beschränkt ist,

i) aus $F_1 \subseteq F_2$ (F_2 setzt F_1 fort) folgt $\chi(F_1) \leq \chi(F_2)$,

j) es ist $\chi(F_1+F_2) \leq \chi(F_1) + \chi(F_2)$ und $\chi(\rho F) = \rho\chi(F)$ $(\rho>0)$.

Beweis: Wir orientieren uns beim Beweis an der Methode von Sadovskij aus [47].

a) M ist genau dann totalbeschränkt, wenn es zu jedem $q\in Q$ und $\varepsilon>0$ ein endliches ε-Netz von M in E bzgl. q gibt, d.h. wenn $[\chi(M)](q) = 0$ ist für alle $q\in Q$; wegen der Vollständigkeit von E stimmen in E die totalbeschränkten abgeschlossenen Mengen mit den kompakten überein.

b) Ist M beschränkt, so ist für jedes $q\in Q$ offenbar $[\chi(M)](q) \leq \sup\{q(x) \mid x\in M\} < \infty$; ist M unbeschränkt, so ist

$\sup\{q(x) \mid x \in M\} = \infty$ für mindestens ein $q \in Q$, also auch $[\chi(M)]\,(q) = \infty$.

c) Wegen d) ist nur $\chi(\overline{\text{co}}\ M) \leq \chi(M)$ zu zeigen. Ist aber $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein endliches ε-Netz von M in E bzgl. q, so ist $K = \text{co}\ \{x_1,\ldots,x_n\}$ ein kompaktes ε-Netz von co M in E bzgl. q; die Invarianz von χ bezüglich des Übergangs zur abgeschlossenen Hülle folgt aus e).

d) Ist $M_1 \subseteq M_2$ und $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein endliches ε-Netz von M_2 in E bzgl. q, so ist $\{x_1,\ldots,x_n\}$ trivialerweise auch ein endliches ε-Netz von M_1.

e) Wählt man $U = U(q;\varepsilon) = \{x \mid x \in E,\ q(x) \leq \varepsilon\}$, so folgt aus $M_1 \subseteq M_2 + U$ nach d) und f)

(3) $[\chi(M_1)](q) \leq [\chi(M_2)](q) + [\chi(U)](q) \leq [\chi(M_2)](q) + \varepsilon$,

da $[\chi(U)](q) \leq \varepsilon$ trivialerweise gilt.

f) Ist $\{x_{11},\ldots,x_{n1}\}$ ein endliches ε_1-Netz von M_1 in E bzgl. q und $\{x_{12},\ldots,x_{m2}\}$ ein endliches ε_2-Netz von M_2 in E bzgl. q, so ist das System $\{x_{i1}+x_{j2} \mid i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m\}$ offensichtlich ein endliches $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$-Netz von M_1+M_2 in E bzgl. q. Ist weiter $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein endliches ε-Netz von M in E bzgl. q und $\rho>0$, so ist $\{\rho x_1,\ldots,\rho x_n\}$ offensichtlich ein endliches $\rho\varepsilon$-Netz von ρM in E bzgl. q; durch Betrachtung von $\frac{1}{\rho}$ statt ρ erhält man die Gleichheit in f).

g) Wegen d) ist nur

(4) $\qquad \chi(M_1 \cup M_2) \leq \max\{\chi(M_1),\chi(M_2)\}$

zu zeigen. Ist $\varepsilon > \max\{[\chi(M_1)](q),[\chi(M_2)](q)\}$ fest, so gibt es endliche ε-Netze $\{x_{11},\ldots,x_{n1}\}$ und $\{x_{12},\ldots,x_{m2}\}$ von M_1 bzw. M_2 in E bzgl. q. Das System $\{x_{11},\ldots,x_{n1},x_{12},\ldots,x_{m2}\}$ ist dann offensichtlich ein endliches ε-Netz von $M_1 \cup M_2$ in E bzgl. q.

Mit Hilfe zweier disjunkter Mengen im Raum $C(\mathbb{R})$ (vgl. S. 13) zeigt man leicht, daß zwischen $\chi(M_1 \cap M_2)$ und $\min\{\chi(M_1), \chi(M_2)\}$ echte Ungleichheit bestehen kann.

h) Ist $F: M \dashrightarrow E$ kompakt, so ist für $N \subseteq M$

(5) $$\chi(F(N)) \leq \chi(F(M)) = 0,$$

d.h. (2) gilt für jedes $\lambda>0$. Ist umgekehrt $\chi(F) = 0$ für einen Operator $F: M \dashrightarrow E$ (M beschränkt), so gilt die Abschätzung

(6) $$[\chi(F(M))](q) \leq \lambda[\chi(M)](q) < \infty$$

für beliebig kleine $\lambda>0$ und jedes $q \in Q$; hieraus folgt aber die Relativkompaktheit von $F(M)$ und damit die Kompaktheit von F auf M.

i) Sei $F_1: M_1 \dashrightarrow E$ ein Operator und $F_2: M_2 \dashrightarrow E$ eine Fortsetzung von F_1 auf $M_2 \supseteq M_1$. Gilt dann für ein $\lambda > \chi(F_2)$

(7) $$\chi(F_2(N)) \leq \lambda\chi(N)$$

für alle $N \subseteq M_2$, so gilt dieselbe Abschätzung trivialerweise für alle $N \subseteq M_1$ und F_1 statt F_2.

j) Sind $F_1: M \dashrightarrow E$ und $F_2: M \dashrightarrow E$ zwei Operatoren mit

(8) $$\chi(F_i(N)) \leq \lambda_i\chi(N) \qquad (i=1,2)$$

für $N \subseteq M$ und $\lambda_i > \chi(F_i)$, so gilt nach d) und f)

(9) $$\chi((F_1+F_2)(N)) \leq \chi(F_1(N) + F_2(N)) \leq$$
$$\leq \chi(F_1(N)) + \chi(F_2(N)) \leq (\lambda_1+\lambda_2)\chi(N)$$

für $N \subseteq M$. Ist $F: M \dashrightarrow E$ ein Operator mit

(10) $$\chi(F(N)) \leq \lambda\chi(N)$$

für $N \subseteq M$ und $\lambda > \chi(F)$, so gilt für $\rho>0$ nach f)

(11) $$\chi((\rho F)(N)) = \rho\chi(F(N)) \leq \rho\lambda\chi(N)$$

für $N \subseteq M$; durch Betrachtung von $\frac{1}{\rho}$ statt ρ erhält man die Gleichheit in j).□

6.3. Bemerkung: Ist E speziell ein Banachraum, so setzen wir $Q = \{\|\cdot\|\}$; wegen

(12) $$\chi(M) = [\hat{\chi}(M)](\|\cdot\|)$$

ergeben sich dann die üblichen Eigenschaften des Nichtkompaktheitsmaßes χ. Eine andere Möglichkeit, das klassische Nichtkompaktheitsmaß χ auf lokalkonvexe Räume zu übertragen, wird durch die Tatsache nahegelegt, daß lokalkonvexe Topologien nicht nur durch eine Halbnormfamilie Q, sondern auch direkt durch die entsprechenden konvexen Nullumgebungen $U = U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\varepsilon)$ (vgl. S. 13) beschrieben werden können. Man könnte daher versuchen, die Menge

(13) $$\tilde{\chi}(M) = \cap\{U \mid U\in T, \text{ es existieren endlich viele Punkte } x_1,\ldots,x_n \text{ mit } M \subseteq (x_1+U)\cup\ldots\ldots\cup(x_n+U)\},$$

die für relativkompaktes M sich wegen der Separiertheit von E ja immer auf {o} zusammenzieht, als eine Art mengenwertiges Nichtkompaktheitsmaß von M anzusehen; im normierten Fall (mit $T = \{K(o,\varepsilon) \mid \varepsilon>0\}$) ergibt sich dann statt (12)

(14) $$\tilde{\chi}(M) = K(o,\chi(M)).$$

Auf der anderen Seite mißt diese Größe die Nichtkompaktheit in allgemeinen lokalkonvexen Räumen nicht "genau genug", da T "zu viele" Nullumgebungen enthalten kann: Sei beispielsweise[::] E ein unendlichdimensionaler normierter reflexiver Raum, M = K die Einheitskugel in E und T das System aller starken und schwachen Nullumgebungen in E. Dann ist (wegen der Schwachkompaktheit von M) einerseits $\tilde{\chi}(M) = \{o\}$, aber andererseits erzeugt T die Normtopologie auf E, in der M nicht relativkompakt ist.□

[::]) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn Prof. Dr. G. Wittstock

6.4. Definition: Ein Operator $F: M \dashrightarrow E$ heiße approximierbar (beschränkt approximierbar; in sich beschränkt approximierbar) auf M bzgl. q, falls es eine Zahl $\varepsilon>0$ und einen stetigen endlichdimensionalen Operator $F_1: M \dashrightarrow E_1$ (einen stetigen beschränkten endlichdimensionalen Operator $F_1: M \dashrightarrow E_1$; einen stetigen beschränkten endlichdimensionalen Operator $F_1: M \dashrightarrow M \cap E_1$) gibt derart, daß $q(Fx-F_1x) < \varepsilon$ ist für alle $x\in M$; in diesem Fall bezeichnen wir die untere Grenze aller dieser ε mit $[\hat{\alpha}_0(F,M)](q)$ ($[\hat{\alpha}_1(F,M)](q)$; $[\hat{\alpha}_2(F,M)](q)$), im gegenteiligen Fall setzen wir $[\hat{\alpha}_0(F,M)](q) = \infty$ ($[\hat{\alpha}_1(F,M)](q) = \infty$; $[\hat{\alpha}_2(F,M)](q) = \infty$). □

Trivialerweise gilt stets die Ungleichheitskette

$$\hat{\alpha}_0(F,M) \le \hat{\alpha}_1(F,M) \le \hat{\alpha}_2(F,M). \tag{15}$$

Da die Definition der Funktionen $\hat{\alpha}_i(F,M)$ sich an der Definition der entsprechenden Zahlen $\alpha_i(F,M)$ (i=0,1,2) orientiert, ist es nicht verwunderlich, daß sich auch für die Maße $\hat{\alpha}_i$ analoge Resultate wie im zweiten Abschnitt herleiten lassen; wir erwähnen hier nur die folgende dem Lemma 2.2 entsprechende Beziehung zwischen $\hat{\alpha}_1$ und χ:

6.5. Lemma: Ist F auf M stetig und beschränkt, so ist

$$\hat{\alpha}_1(F,M) = \chi(F(M)). \tag{16}$$

Beweis: Die Ungleichheit $[\hat{\alpha}_1(F,M)](q) \le [\chi(F(M))](q)$ wird ähnlich wie die entsprechende Ungleichheit in 2.2 bewiesen; hier ist nur $\pi_j(x) = \max\{0, \varepsilon-q(Fx-y_j)\}$ zu setzen. Ist andererseits $\varepsilon > [\hat{\alpha}_1(F,M)](q)$ und $F_1: M \dashrightarrow E_1$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $q(Fx-F_1x) < \varepsilon$, so gilt wegen der Relativkompaktheit von $F_1(M)$

$$[\chi(F(M))](q) \le [\chi(F_1(M))](q) + \varepsilon = \varepsilon. \tag{17}$$ □

6.6. Definition: Ist $F: M \dashrightarrow E$ ein beliebiger Operator, so nennen wir die durch

$$[\hat{\eta}(F,M)](q) = \inf\{q(x-Fx) \mid x\in M\} \tag{18}$$

definierte Funktion $\hat{\eta}(F,M)\in A$ die minimale Verschiebung von F auf M bzgl. q.□

6.7. Lemma: Sei M eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von E und $F: M \dashrightarrow E$ ein auf M in sich beschränkt approximierbarer Operator. Dann gilt

$$\hat{\eta}(F,M) \le \hat{\alpha}_2(F,M). \tag{19}$$

Beweis: Sei $q\in Q$ fest, $\varepsilon > [\hat{\alpha}_2(F,M)](q)$ und $F_1: M \dashrightarrow M\cap E_1$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $q(Fx-F_1x) < \varepsilon$ für $x\in M$. Die Menge $K = \overline{\text{co}}\, F_1(M) \subseteq M$ ist dann kompakt, konvex und invariant unter F_1, so daß nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz ein $\hat{x}\in K$ mit $\hat{x} = F_1\hat{x}$ existiert. Aus $q(\hat{x}-F\hat{x}) = q(F_1\hat{x}-F\hat{x}) < \varepsilon$ folgt die Behauptung.□

6.8. Satz: Sei M eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von E und $F: M \dashrightarrow M$ stetig und strikt $\hat{\chi}$-kondensierend auf M. Dann hat F einen Fixpunkt $\hat{x}$ in M, und insbesondere gilt

$$\hat{\eta}(F,M) = 0. \tag{20}$$

Beweis: Sei $\hat{\chi}(F) < \lambda < 1$ und sei $K[F,M]$ der Limesbereich von F bzgl. M, d.h.

$$K[F,M] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \tag{21}$$

mit $K_0 = M$, $K_1 = \overline{\text{co}}\, F(M), \ldots\ldots, K_n = \overline{\text{co}}\, F(K_{n-1})$. Dann gilt $K_n \subseteq K_{n-1}$, $F(K_n) \subseteq K_n$ und

$$\hat{\chi}(K[F,M]) \le \hat{\chi}(K_n) \le \lambda^n \hat{\chi}(M), \tag{22}$$

wie man durch Induktion leicht beweist. Wegen der Beschränktheit von M folgt nun wie in Lemma 6.2 h), daß $\hat{\chi}(K[F,M]) = 0$, d.h.

daß $K[F,M]$ kompakt und konvex ist. (Daß $K[F,M]$ nichtleer ist, kann wie im Fall eines Nichtkompaktheitsmaßes in Banachräumen (vgl. [23]) bewiesen werden.) Nach dem Schauder-Tichonovschen Fixpunktsatz existiert also ein $\hat{x}\in K[F,M] \subseteq M$ mit $\hat{x} = F\hat{x}$.□

6.9. Satz: Sei M eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von E und $F: M \dashrightarrow M$ ein auf M stetiger und in sich beschränkt approximierbarer χ-Lipschitz-Operator mit $\chi(F) \geq 1$. Dann gilt

$$\hat{\eta}(F,M) \leq [1-1/\chi(F)]\hat{\alpha}_2(F,M). \tag{23}$$

Beweis: Sei $q\in Q$ fest, $\varepsilon > [\hat{\alpha}_2(F,M)](q)$ und $F_1: M \dashrightarrow M\cap E_1$ endlichdimensional, stetig und beschränkt mit $q(Fx-F_1x) < \varepsilon$ für $x\in M$. Wir wählen Zahlen $\lambda>\chi(F)$ und $0\leq\rho<\frac{1}{\lambda}$ und definieren einen Operator $F_\rho: M \dashrightarrow E$ durch $F_\rho x = (1-\rho)F_1x + \rho Fx$. Dann ist F_ρ wegen

$$\begin{aligned}\chi(F_\rho(N)) &\leq (1-\rho)\chi(F_1(N)) + \rho\chi(F(N)) = \\ &= \rho\chi(F(N)) \leq \rho\lambda\chi(N)\end{aligned} \tag{24}$$

strikt χ-kondensierend auf M mit $\chi(F_\rho)\leq\rho\lambda<1$. Außerdem folgt aus der Konvexität von M, daß

$$F_\rho(M) \subseteq (1-\rho)F_1(M) + \rho F(M) \subseteq M \tag{25}$$

ist. Mithin besitzt F_ρ nach Satz 6.8 einen Fixpunkt $\hat{x}\in M$, für den dann $\hat{x}-F\hat{x} = (1-\rho)(F_1\hat{x}-F\hat{x})$, also $q(\hat{x}-F\hat{x}) < (1-\rho)\varepsilon$ gilt. Aus der beliebigen Wahl der Zahlen λ und ρ folgt die Behauptung.□

Wir kommen nun zur Definition der Rotation eines approximierbaren Vektorfeldes $\Phi = I-F$, das auf dem Abschluß $\overline{\Omega}$ einer offenen Teilmenge Ω von E definiert ist. Da Ω hierbei im allgemeinen als unbeschränkt angesehen werden muß, ist es erforderlich, wenigstens den F approximierenden endlichdimensionalen Operator F_1 als beschränkt vorauszusetzen. Hieraus erklärt es sich, daß

im Gegensatz zum dritten Abschnitt nunmehr die Größe $\hat{\alpha}_1$ statt der Größe $\hat{\alpha}_0$ in Betracht gezogen werden muß.

Sei also $\Omega \subseteq E$ offen, $F: \overline{\Omega} \dashrightarrow E$ beschränkt approximierbar auf $\overline{\Omega}$ bzgl. q und gelte

(26) $\quad \inf\{q(\Phi x) \mid x \in \mathring{\overline{\Omega}}\} > [\hat{\alpha}_1(F,\overline{\Omega})](q)$

($\Phi = I-F$). Ist dann $[\hat{\alpha}_1(F,\overline{\Omega})](q) < \varepsilon < \inf\{q(\Phi x) \mid x \in \mathring{\overline{\Omega}}\}$ und $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ ein endlichdimensionaler, stetiger und beschränkter Operator mit $\Omega_1 = \Omega \cap E_1 \neq \emptyset$ und $q(Fx-F_1x) < \varepsilon$ für alle $x \in \overline{\Omega}$, so ist der Abbildungsgrad $\deg_B(\Phi_1|_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, o)$ ($\Phi_1 = I-F_1$) erklärt. Diese (von E_1 und F_1 unabhängige) Zahl nennen wir wieder die Rotation $\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega)$ von Φ auf Ω bzgl. q.

6.10. Bemerkung: Entsprechend der Stabilität des Nullumgebungssystems T von E gegenüber endlichen Durchschnitten (wie unter e) auf S. 13 gefordert) ist es sinnvoll, die Stabilität der Halbnormfamilie Q unter endlicher Maximumbildung zu fordern (d.h. aus $q_1,\dots,q_n \in Q$ folgt $\max\{q_1,\dots,q_n\} \in Q$). Die Familie Q bildet dann bzgl. der punktweisen Halbordnung ein gerichtetes System; konvergiert die entsprechende Moore-Smith-Folge $(\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega))_{q\in Q}$ bezüglich dieses gerichteten Systems, so nennen wir $\hat{\gamma}(\Phi,\Omega) = \lim \hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega)$ einfach die Rotation von Φ auf Ω. Ein hinreichendes Kriterium für die Gleichheit $\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega) = \hat{\gamma}_{\bar{q}}(\Phi,\Omega)$ der Rotationen bzgl. zwei verschiedener Halbnormen q und $\bar{q}$ ist das Bestehen der Ungleichheit

(27) $\quad [\hat{\alpha}_1(F,\overline{\Omega})](q) < \inf\{\bar{q}(\Phi x) \mid x \in \mathring{\overline{\Omega}}\}$.

Ist nämlich (27) erfüllt und $[\hat{\alpha}_1(F,\overline{\Omega})](q) < \varepsilon < \inf\{q(\Phi x) \mid x \in \mathring{\overline{\Omega}}\}$ fest, so kann man einen einheitlichen endlichdimensionalen stetigen und beschränkten Operator $F_1: \overline{\Omega} \dashrightarrow E_1$ wählen, für den sowohl $q(Fx-F_1x) < \varepsilon$ als auch $\bar{q}(Fx-F_1x) < \varepsilon$ gilt; hieraus folgt die Gleichheit der betrachteten Rotationen.□

Von der Vielzahl der übertragbaren Resultate aus dem vierten Abschnitt erwähnen wir hier nur die drei wichtigsten. Sei dazu im folgenden stets $\Omega \subseteq E$ offen, $F\colon \overline{\Omega} \longrightarrow E$ beschränkt approximierbar auf $\overline{\Omega}$ bzgl. q und $\Phi = I-F$.

6.11. Satz: Ist $\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega)$ definiert und verschieden von Null, so gilt

$$[\hat{\eta}(F,\overline{\Omega})](q) \leq [\hat{\alpha}_1(F,\overline{\Omega})](q). \tag{28}$$

Beweis: Der Beweis verläuft genauso wie der von Satz 3.2.□

6.12. Lemma: Seien $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$ paarweise disjunkte Teilmengen von Ω und gelte

$$\inf\{q(\Phi x) \mid x\in\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j\} > [\hat{\alpha}_1(F,\overline{\Omega})](q). \tag{29}$$

Dann sind die Rotationen $\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega)$ und $\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega_j)$ $(j=1,\ldots,m)$ definiert, und es gilt

$$\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega) = \sum_{j=1}^{m} \hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega_j). \tag{30}$$

Beweis: Der Beweis verläuft genauso wie der von Lemma 4.3.□

6.13. Lemma: Seien $F\colon \overline{\Omega} \longrightarrow E$ und $G\colon \overline{\Omega} \longrightarrow E$ beschränkt approximierbar auf $\overline{\Omega}$ und sei $H\colon [0,1]\times\overline{\Omega} \longrightarrow E$ eine F und G verbindendende Homotopie (Definition wie in 4.4). Weiter gelte

$$\inf\{q(\Xi(t,x)) \mid 0\leq t\leq 1,\ x\in\dot{\Omega}\} > [\hat{\alpha}_1(H,[0,1]\times\overline{\Omega})](q) \tag{31}$$

$(\Xi = I-H)$. Dann sind die Rotationen $\hat{\gamma}_q(\Phi,\Omega)$ und $\hat{\gamma}_q(\Psi,\Omega)$ definiert $(\Phi = I-F,\ \Psi = I-G)$ und einander gleich.

Beweis: Der Beweis verläuft genauso wie der von Lemma 4.5.□

§ 7. ANWENDUNG AUF EIN ANFANGSWERTPROBLEM

In diesem Abschnitt werden wir die Approximationssätze 6.9 und 6.10 auf ein unendliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit nacheilendem Argument

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad x_1'(t) &= f_1(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_1(t-\tau_{01}),x_2(t-\tau_{02}),\dots \\
&\quad \dots,x_1'(t-\tau_{11}),x_2'(t-\tau_{12}),\dots) \\
x_2'(t) &= f_2(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_1(t-\tau_{01}),x_2(t-\tau_{02}),\dots \\
&\quad \dots,x_1'(t-\tau_{11}),x_2'(t-\tau_{12}),\dots) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_1(t-\tau_{01}),x_2(t-\tau_{02}),\dots \\
&\quad \dots,x_1'(t-\tau_{11}),x_2'(t-\tau_{12}),\dots)
\end{aligned}
$$

anwenden ($\tau_{01},\tau_{02},\dots,\tau_{11},\tau_{12},\dots\in\mathbb{R}$). Dazu betrachten wir folgende Räume ($a<b$): den Banachraum $C(a,b) = \{x \mid x\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig$\}$ mit der Norm $\|x\|_C = \max_{a\le t\le b} |x(t)|$, den Banachraum $L_p(a,b) = \{x \mid x\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar auf $[a,b]$, $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty\}$ (modulo Nullfunktionen) mit der Norm $\|x\|_L =$ $= \{\int_a^b |x(t)|^p dt\}^{1/p}$ $(1\le p<\infty)$ und den Banachraum $W_p(a,b) =$ $= \{x \mid x\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutstetig, $x'\in L_p(a,b)\}$ mit der Norm $\|x\|_W = \|x\|_C + \|x'\|_L$ $(1\le p<\infty)$. Der lineare Raum $C^{\mathbb{N}}(a,b)$ $(L_p^{\mathbb{N}}(a,b);\ W_p^{\mathbb{N}}(a,b))$ aller Folgen $x = (x_n)_n$ mit $x_n\in C(a,b)$ $(x_n\in L_p(a,b);\ x_n\in W_p(a,b))$ wird dann mit der Halbnormfamilie $q_n^C(x) = \|x_n\|_C$ $(q_n^L(x) = \|x_n\|_L;\ q_n^W(x) = \|x_n\|_W)$ zu einem vollständigen metrisierbaren lokalkonvexen Raum (Fréchet-Raum).

Für eine Funktionenfolge $x = (x_n)_n$ setzen wir im folgenden abkürzend

(2) $\quad x(t) := (x_n(t))_n,$

(3) $\quad x(t-\tau_0) := (x_n(t-\tau_{0n}))_n,$

(4) $\quad x'(t) := (x_n'(t))_n,$

(5) $\quad x'(t-\tau_1) := (x_n'(t-\tau_{1n}))_n$

und

(6) $\quad \int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_n(t)dt)_n.$

Dann schreibt sich das System (1) kurz um in

(7) $\quad x'(t) = f(t,x(t),x(t-\tau_0),x'(t-\tau_1))$

(mit $f = (f_n)_n$). Zu einer vorgegebenen Funktionenfolge $x_0 = (x_{0n})_n$ suchen wir eine Lösung von (7), d. h. eine Funktionenfolge $\hat{x} \in W_p^{\mathbb{N}}(-h,H)$ $(h>0, H>0)$, die auf $[0,H]$ das Gleichungssystem (7) erfüllt und für die auf $[-h,0]$ die Gleichheit

(8) $\quad \hat{x}(t) = x_0(t)$

gilt. Dazu treffen wir die folgenden Voraussetzungen:

a) für $\tau_0 = (\tau_{0n})_n \in s$ gelte

(9) $\quad 0 \leq \tau_{0n} \leq h \qquad (n \in \mathbb{N});$

b) für $\tau_1 = (\tau_{1n})_n \in s$ gelte

(10) $\quad 0 \leq \tau_{1n} \leq h \qquad (n \in \mathbb{N});$

c) es sei $x_0 = (x_{0n})_n \in W_p^{\mathbb{N}}(-h,0)$ mit

(11) $\quad x_0(0) = (0,0,0,\ldots);$

d) es gebe eine Folge $\rho_0 = (\rho_{0n})_n \in s$ mit

(12) $$q_n^W(x_0) = \max_{-h\le t\le 0} |x_{0n}(t)| + \{\int_{-h}^{0} |x'_{0n}(t)|^p dt\}^{1/p}$$

$$\le \rho_{0n} \qquad (n\in\mathbb{N});$$

e) für jedes $n\in\mathbb{N}$ hänge f_n nur von einer endlichen Anzahl a(n) (b(n); c(n)) von Variablen im zweiten (dritten; vierten) Argument ab, also

(13) $$f_n: [0,H]\times\mathbb{R}^{a(n)}\times\mathbb{R}^{b(n)}\times\mathbb{R}^{c(n)} \longrightarrow \mathbb{R};$$

f) $f_n(\cdot,\xi,\eta,\zeta): [0,H] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei meßbar für alle $\xi = (\xi_n)_n\in s$, $\eta = (\eta_n)_n\in s$, $\zeta = (\zeta_n)_n\in s$;

g) $f_n(t,\cdot,\cdot,\zeta): s\times s \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig für alle $t\in[0,H]$, $\zeta = (\zeta_n)_n\in s$;

h) es existiere eine beschränkte Folge $\lambda = (\lambda_n)_n\in m$ mit

(14) $$|f_n(t,\xi,\eta,\zeta) - f_n(t,\xi,\eta,\tilde{\zeta})| \le \lambda_n|\zeta_n - \tilde{\zeta}_n|$$

für $t\in[0,H]$, $\xi = (\xi_n)_n\in s$, $\eta = (\eta_n)_n\in s$, $\zeta = (\zeta_n)_n\in s$, $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_n)_n \in s$;

i) es existiere eine Folge $\mu = (\mu_n)_n$ von Funktionen $\mu_n: s\times[0,H] \longrightarrow \mathbb{R}$ derart, daß erstens

(15) $$\mu(\rho,\cdot)\in L_p^{\mathbb{N}}(0,H)$$

ist für alle $\rho = (\rho_n)_n\in s$ und zweitens

(16) $$|f_n(t,\xi,\eta,\zeta)| \le \mu_n(\rho,t)$$

gilt für $t\in[0,H]$, $\xi = (\xi_n)_n\in s$ mit $|\xi_n|\le\rho_n$, $\eta = (\eta_n)_n\in s$ mit $|\eta_n|\le\rho_n$ und $\zeta = (\zeta_n)_n\in s$ mit $|\zeta_n|\le\rho_n$.

Sei nun E der lokalkonvexe Raum aller $x\in W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ mit $x(0) = (0,0,0,\ldots)$. Für festes $x\in E$ liegt die durch

(17) $$\bar{x}(s) = \begin{cases} x_0(s) & -h\le s\le 0 \\ x(s) & 0\le s\le H \end{cases}$$

definierte Funktionenfolge $\bar{x}$ dann im Raum $W_p^{\mathbb{N}}(-h,H)$. Wegen der Eigenschaften a), b), e), f), g) und h) bildet der durch

$$[Fx](t) = \int_0^t f(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{x}'(s-\tau_1))ds \tag{18}$$

definierte Operator F den Raum E in sich ab.

7.1. Lemma: Ist $x\in E$ ein Fixpunkt des Operators F, so ist $\hat{x} = \bar{x}$ eine Lösung des Anfangswertproblems (7)/(8).

Beweis: Ist $x = (x_n)_n$ ein Fixpunkt von F in E, so gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$x_n(t) = \int_0^t f_n(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{x}'(s-\tau_1))ds \tag{19}$$

$(0\le t\le H)$; wegen e), f), g) und h) ist x_n dann absolutstetig auf $[0,H]$ und $x_n(0) = 0$. Weiter existiert $x_n'(t)$ für fast alle $t\in[0,H]$ und es ist

$$x_n'(t) = f_n(t,x(t),\bar{x}(t-\tau_0),\bar{x}'(t-\tau_1)), \tag{20}$$

also $x_n'\in L_p(0,H)$ wegen i). Somit erfüllt x auf $[0,H]$ die Gleichung (7), und nach Konstruktion ist $\hat{x} = \bar{x}$ absolutstetig auf $[-h,H]$ und erfüllt dort (7) und (8).□

Sei $\rho_0 = (\rho_{0n})_n$ die in d) eingeführte Folge und sei $H>0$ so klein, daß für alle $n\in\mathbb{N}$ die Ungleichheit

$$\int_0^H \mu_n(\rho_0,s)ds + \|\mu_n(\rho_0,\cdot)\|_L \le \rho_{0n} \tag{21}$$

(mit $\mu = (\mu_n)_n$ gemäß i)) gültig ist. Wir betrachten dann den Operator F auf der Menge

$$M = \{x \mid x\in E,\ q_n^W(x) \le \rho_{0n} \text{ für alle } n\in\mathbb{N}\}. \tag{22}$$

7.2. Lemma: Die Menge M ist konvex, beschränkt und abgeschlossen in E und es ist $F(M) \subseteq M$.

Beweis: Die Konvexität, Beschränktheit und Abgeschlossenheit von M ist klar. Sei also $x = (x_n)_n \in M$ fest. und $Fx = y = (y_n)_n$. Ist dann $0 \le s \le H$, so gelten die Abschätzungen

$$|x_n(s)| \le q_n^C(x) \le q_n^W(x) \le \rho_{0n} \tag{23}$$

und (wegen (12))

$$|\bar{x}_n(s-\tau_{0n})| \le \max\{q_n^C(x),\ q_n^C(x_0)\} \le \rho_{0n} \tag{24}$$

sowie

$$|\bar{x}_n'(s-\tau_{1n})| \le \max\{q_n^L(x'),\ q_n^L(x_0')\} \le \rho_{0n}, \tag{25}$$

also (wegen (16))

$$|f_n(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{x}'(s-\tau_1))| \le \mu_n(\rho_0,s), \tag{26}$$

und schließlich

$$q_n^C(y) = \max_{0\le t\le H} \left|\int_0^t f_n(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{x}'(s-\tau_1))ds\right| \le \tag{27}$$
$$\le \int_0^H \mu_n(\rho_0,s)ds.$$

Weiter gilt

$$q_n^L(y') = \left\{\int_0^H |f_n(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{x}'(s-\tau_1))|^p ds\right\}^{1/p} \le \tag{28}$$
$$\le \left\{\int_0^H |\mu_n(\rho_0,s)|^p ds\right\}^{1/p} = \|\mu_n(\rho_0,\cdot)\|_L.$$

Aus (27), (28) und (21) folgt

$$q_n^W(y) = q_n^C(y) + q_n^L(y') \le \tag{29}$$
$$\le \int_0^H \mu_n(\rho_0,s)ds + \|\mu_n(\rho_0,\cdot)\|_L \le \rho_{0n},$$

also $y \in M$. □

7.3. Lemma: F ist stetig auf M bzgl. der translationsinvarianten Metrik

(30) $$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{q_n^W(x-y)}{1+q_n^W(x-y)}.$$

Beweis: Da die Halbnormfamilie $Q = \{q_n^W \mid n\in\mathbb{N}\}$ dieselbe Topologie auf E erzeugt wie die aus ihr abgeleitete Metrik (30), genügt es, die Stetigkeit von F bzgl. einer beliebigen Halbnorm q_n^W zu zeigen. Gelte also $x = (x_n)_n \in M$, $y = (y_n)_n \in M$, $Fx = u = (u_n)_n$ und $Fy = v = (v_n)_n$. Sei weiter

(31) $$w(t) = f(t,x(t),\bar{x}(t-\tau_0),\bar{y}'(t-\tau_1)).$$

Dann ist $w = (w_n)_n \in L_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ und

(32) $$q_n^L(u'-v') \le q_n^L(u'-w) + q_n^L(w-v').$$

Einerseits gilt aber nach h)

(33) $$q_n^L(u'-w) =$$

$$= \{\int_0^H |f_n(t,x(t),\bar{x}(t-\tau_0),\bar{x}'(t-\tau_1)) -$$

$$- f_n(t,x(t),\bar{x}(t-\tau_0),\bar{y}'(t-\tau_1))|^p dt\}^{1/p} \le$$

$$\le \lambda_n \{\int_0^H |\bar{x}_n'(t-\tau_{1n}) - \bar{y}_n'(t-\tau_{1n})|^p dt\}^{1/p} \le$$

$$\le \lambda_n \{\int_0^{H-\tau_{1n}} |x_n'(s) - y_n'(s)|^p ds\}^{1/p} \le$$

$$\le \lambda_n q_n^L(x'-y'),$$

und der letzte Ausdruck kann klein gemacht werden. Andererseits gilt

(34) $$q_n^L(w-v') = \{\int_0^H |f_n(t,x(t),\bar{x}(t-\tau_0),\bar{y}'(t-\tau_1)) -$$

$$- f_n(t,y(t),\bar{y}(t-\tau_0),\bar{y}'(t-\tau_1))|^p dt\}^{1/p},$$

und auch dieser Ausdruck kann wegen g) klein gemacht werden. Jetzt schätzen wir $q_n^C(u-v)$ ab: Es ist

$$(35) \qquad q_n^C(u-v) = \max_{0\le t\le H} |u_n(t) - v_n(t)| \le$$

$$\le \int_0^H |u_n'(t) - v_n'(t)|dt \le H^{(p-1)/p} q_n^L(u'-v'),$$

und der letzte Ausdruck kann nach dem eben Bewiesenen klein gemacht werden. Aus (32), (33), (34) und (35) folgt die Behauptung.□

Wir wollen nun eine $\hat{\chi}$-Lipschitz-Eigenschaft für den Operator F auf M nachweisen. Dazu setzen wir eine χ-Lipschitz-Bedingung an den schon in (31) betrachteten "partiellen" Operator voraus und leiten daraus eine $\hat{\chi}$-Lipschitz-Eigenschaft für F ab.

7.4. Lemma: Sei $z \in W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ fest und seien Operatoren $\Phi_z\colon W_p^{\mathbb{N}}(0,H) \longrightarrow L_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ und $\Psi_z\colon W_p^{\mathbb{N}}(0,H) \longrightarrow C^{\mathbb{N}}(0,H)$ definiert durch

$$(36) \qquad [\Phi_z x](t) = f(t,x(t),\bar{x}(t-\tau_0),\bar{z}'(t-\tau_1))$$

bzw.

$$(37) \qquad [\Psi_z x](t) = \int_0^t [\Phi_z x](s)ds.$$

Sei χ_C (χ_L; χ_W) das in Kapitel 6 betrachtete (Sadovskijsche) Nichtkompaktheitsmaß im lokalkonvexen Raum $C^{\mathbb{N}}(0,H)$ ($L_p^{\mathbb{N}}(0,H)$; $W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$). Für jedes $z \in W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ seien Φ_z und Ψ_z χ-Lipschitz-Operatoren, d. h. es gebe Konstanten $\lambda_L(z)>0$ und $\lambda_C(z)>0$ mit

$$(38) \qquad \chi_L(\Phi_z(N)) \le \lambda_L(z)\chi_W(N)$$

und

$$(39) \qquad \chi_C(\Psi_z(N)) \le \lambda_C(z)\chi_W(N)$$

für $N \subseteq M$. Sind dann die Mengen $\Lambda_L = \{\lambda_L(z) \mid z \in W_p^{\mathbb{N}}(0,H)\}$ und $\Lambda_C = \{\lambda_C(z) \mid z \in W_p^{\mathbb{N}}(0,H)\}$ nach oben beschränkt, so ist F auf M ein χ_W-Lipschitz-Operator mit

$$(40) \qquad \chi_W(F) \leq \sup_{\lambda_L \in \Lambda_L} \lambda_L + \sup_{\lambda_C \in \Lambda_C} \lambda_C + [1+H^{(p-1)/p}] \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|,$$

wo $(\lambda_n)_n$ die Folge aus h) ist.

Beweis: Sei $N \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$ fest und $\{z_1,\ldots,z_m\}$ ein endliches ε-Netz von N in $W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ bzgl. q_n^W. Sei weiter

$$(41) \qquad \Phi(N) := \bigcup_{j=1}^{m} \Phi_{z_j}(N).$$

Wegen (38) und der Halbadditivität des Nichtkompaktheitsmaßes χ_L (vgl. [47], S. 90) existiert dann ein endliches $\lambda_L\varepsilon$-Netz ($\lambda_L = \max\{\lambda_L(z_1),\ldots,\lambda_L(z_m)\}$) von $\Phi(N)$ in $L_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ bzgl. q_n^L. Da $\{z_1,\ldots,z_m\}$ ein endliches ε-Netz von N in $W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ bzgl. q_n^W ist, ist $\{z_1',\ldots,z_m'\}$ offenbar ein endliches ε-Netz von N' in $L_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ bzgl. q_n^L. (Im folgenden sei für $A \subseteq W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ stets $A' = \{a' \mid a \in A\}$.) Wir zeigen, daß es für jedes $y = (y_n)_n \in F(N)'$ ein $\phi = (\phi_n)_n \in \Phi(N)$ gibt mit

$$(42) \qquad q_n^L(y-\phi) < \lambda_n\varepsilon.$$

Ist nämlich $y \in F(N)'$, so ist $y = v'$ mit $v \in F(N)$, also $v = Fu$ mit $u \in N$. Zu u gibt es ein $z_j = (z_{jn})_n \in \{z_1,\ldots,z_m\}$ mit $q_n^W(z_j-u) < \varepsilon$, also auch

$$(43) \qquad q_n^L(z_j'-u') < \varepsilon.$$

Für $\phi := \Phi_{z_j} u$ gilt dann wie in Lemma 7.3

$$(44) \qquad q_n^L(y-\phi) = \{\int_0^H |f_n(t,u(t),\bar{u}(t-\tau_0),\bar{u}'(t-\tau_1)) -$$
$$- f_n(t,u(t),\bar{u}(t-\tau_0),\bar{z}_j'(t-\tau_1))|^p dt\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \lambda_n \{\int_0^H |\bar{u}_n'(t-\tau_{1n}) - \bar{z}_{jn}'(t-\tau_{1n})|^p dt\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \lambda_n \{\int_0^{H-\tau_{1n}} |u_n'(s) - z_{jn}'(s)|^p ds\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \lambda_n q_n^L(u'-z_j') < \lambda_n \varepsilon.$$

Aus (41) und (44) folgt, daß

$$(45) \quad [\chi_L(F(N)')](q_n^L) \leq (\lambda_L+\lambda_n)[\chi_W(N)](q_n^W)$$

gilt. Sei nun analog zu (41)

$$(46) \qquad \Psi(N) := \bigcup_{j=1}^{m} \Psi_{z_j}(N).$$

Wegen (39) und der Halbadditivität des Nichtkompaktheitsmaßes χ_C existiert dann ein endliches $\lambda_C\varepsilon$-Netz ($\lambda_C = \max\{\lambda_C(z_1),\ldots,\lambda_C(z_m)\}$) von $\Psi(N)$ in $C^{\mathbb{N}}(0,H)$ bzgl. q_n^C. Offenbar ist $\{z_1,\ldots,z_m\}$ auch wieder ein endliches ε-Netz von N in $C^{\mathbb{N}}(0,H)$ bzgl. q_n^C. Wir zeigen, daß es für jedes $y = (y_n)_n \in F(N)$ ein $\psi = (\psi_n)_n \in \Psi(N)$ gibt mit

$$(47) \qquad q_n^C(y-\psi) < \lambda_n H^{(p-1)/p}\varepsilon.$$

Ist nämlich $y\in F(N)$, so ist $y = Fx$ mit $x\in N$. Zu x gibt es ein $z_j = (z_{jn})_n \in \{z_1,\ldots,z_m\}$ mit

$$(48) \qquad q_n^W(z_j-x) < \varepsilon.$$

Für $\psi := \Psi_{z_j} x$ gilt dann wieder

$$(49) \quad q_n^C(y-\psi) = \max_{0\leq t\leq H} |\int_0^t f_n(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{x}'(s-\tau_1)) -$$

$$- f_n(s,x(s),\bar{x}(s-\tau_0),\bar{z}_j'(s-\tau_1))ds| \leq$$

$$\leq \lambda_n \int_0^H |x_n'(s) - z_{jn}'(s)|ds \leq$$

$$\leq \lambda_n H^{(p-1)/p}\{\int_0^H |x_n'(s) - z_{jn}'(s)|^p ds\}^{1/p} =$$

$$= \lambda_n H^{(p-1)/p} q_n^L(x'-z_j') \leq$$

$$\leq \lambda_n H^{(p-1)/p} q_n^W(x-z_j) < \lambda_n H^{(p-1)/p}\varepsilon.$$

Aus (46) und (49) folgt, daß

(50) $\quad [\hat{\chi}_C(F(N))](q_n^C) \leq (\lambda_C+\lambda_n H^{(p-1)/p})[\hat{\chi}_W(N)](q_n^W)$

gilt. Wegen

(51) $\quad [\hat{\chi}_W(A)](q_n^W) \leq [\hat{\chi}_C(A)](q_n^C) + [\hat{\chi}_L(A')](q_n^L)$

für alle $A \subseteq W_p^{\mathbb{N}}(0,H)$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt also

(52) $\quad [\hat{\chi}_W(F(N))](q_n^W) \leq$

$$\leq \{\sup_{\lambda_L\in\Lambda_L}\lambda_L + \sup_{\lambda_C\in\Lambda_C}\lambda_C + [1+H^{(p-1)/p}]\lambda_n\}[\hat{\chi}_W(N)](q_n^W).$$

Hieraus folgt (40), da die rechte Seite in (40) nicht mehr von n abhängt.□

7.5. Lemma: F ist in sich beschränkt approximierbar auf M mit

(53) $\qquad [\hat{\alpha}_2(F,M)](q_n^W) \leq \rho_{0n} \qquad (n\in\mathbb{N}).$

Beweis: Die zur Halbnormfamilie $Q = \{q_n^W | \ n\in\mathbb{N}\}$ gehörigen Nullumgebungen haben die Form

(54) $\qquad U = U(n_1,\ldots,n_k;\varepsilon) =$

$$= \{x | \ x\in W_p^{\mathbb{N}}(0,H),\ q_{n_1}^W(x)\leq\varepsilon,\ldots\ldots,q_{n_k}^W(x)\leq\varepsilon\}.$$

Für den Nulloperator F_1: M ⟶ M ∩ {o} gilt aber nach (22)

(55) $\qquad q_n^W(Fx-F_1x) = q_n^W(Fx) \leq \rho_{0n},$

für $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$, also

(56) $\quad [\alpha_2(F,M)](q_n^W) \leq \rho_{0n}$.□

Wir haben nun alle Voraussetzungen geschaffen, um auf E, M und F die Sätze 6.8 und 6.9 anwenden zu können und erhalten damit den folgenden Approximations- und Existenzsatz:

7.6. Satz: Seien sämtliche obenstehenden Voraussetzungen an E, M und F erfüllt und sei

(57) $$\hat{\lambda} := \sup_{\lambda_L \in \Lambda_L} \lambda_L + \sup_{\lambda_C \in \Lambda_C} \lambda_C + [1+H^{(p-1)/p}] \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$$

mit Λ_L gemäß (38), Λ_C gemäß (39), H gemäß (21), $1 \leq p < \infty$ und $(\lambda_n)_n$ gemäß h). Dann gilt:

a) Ist $\hat{\lambda} \geq 1$, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$

(58) $$[\hat{\eta}(F,M)](q_n^W) \leq \frac{\hat{\lambda}-1}{\hat{\lambda}} \rho_{0n}.$$

b) Ist $\hat{\lambda} < 1$, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$

(59) $$[\hat{\eta}(F,M)](q_n^W) = 0.$$

In diesem Fall besitzt das Anfangswertproblem (7)/(8) eine Lösung $\hat{x} \in W_p^{\mathbb{N}}(-h,H)$.

Beweis: Im Fall a) folgt die Aussage aus Lemma 7.4, Satz 6.9 und Lemma 7.5; im Fall b) folgt die Aussage aus Lemma 7.4, Satz 6.8 und Lemma 7.1.□

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. AMBROSETTI: Proprietá spettrali di certi operatori lineari non compatti, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 42 (1969), 189-200

[2] А. Л. БАДОЕВ, Б. Н. САДОВСКИЙ: Пример уплотняющего оператора в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, ДАН СССР 186, 6 (1969), 1239-1242

[3] Ю. Г. БОРИСОВИЧ, Ю. И. САПРОНОВ: К топологической теории уплотняющих операторов, ДАН СССР 183, 1 (1968), 18-20

[4] F. E. BROWDER: Local and global properties of nonlinear mappings in Banach spaces, Inst. Naz. di Alta Math. Symp. Math. II (1968), 13-35

[5] J. DANEŠ: On densifying and related mappings and their applications in nonlinear functional analysis, Proc. summer school, Neuendorf, GDR (1972), 15-56

[6] G. DARBO: Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24 (1955), 84-92

[7] K. DEIMLING: Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1974

[8] C. FENSKE: Analytische Theorie des Abbildungsgrades für Abbildungen in Banachräumen, Math. Nachr. 48 (1971), 279-290

[9] C. FENSKE: Leray-Schauder-Theorie für eine Klasse differenzierbarer Abbildungen in Banachräumen, Ges. Math. Datenverarb. Bonn 48 (1971), 1-40

[10] M. FURI, M. MARTELLI: On the minimal displacement of points under α-Lipschitz maps in normed spaces, Boll. U.M.I. (4) 9 (1974), 791-799

[11] M. FURI, M. MARTELLI: A Lefschetz type theorem for the minimal displacement of points under maps defined on a class of ANR's, Boll. U.M.I. (4) 10 (1974), 174-181

[12] M. FURI, A. VIGNOLI: Fixed points for densifying mappings, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 47 (1969), 465-467

[13] M. FURI, A. VIGNOLI: On α-nonexpansive mappings and fixed points, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 48 (1970), 195-198

[14] J. A. GATICA: Fixed point theorems for k-set-contractions and pseudocontractive mappings, J. Math. Anal. Appl. 46 (1974), 555-564

[15] J. A. GATICA, W. A. KIRK: A fixed point theorem for k-set-contractions defined in a cone, Pac. J. Math. 53 (1974), 131-136

[16] A. GRANAS: The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs, Bull. S.M.F. 100 (1972), 209-229

[17] J. K. HALE: Continuous dependence of fixed points of condensing maps, J. Math. Anal. Appl. 46 (1974), 388-394

[18] S. ISHIKAWA: Fixed points by a new iteration method, Proc. AMS 44 (1974), 147-150

[19] S. ITOH, W. TAKAHASHI: Single-valued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems, J. Math. Anal. Appl. 59 (1977), 514-521

[20] Л. В. КАНТОРОВИЧ, Г. П. АКИЛОВ: Функциональный анализ, изд. "Наука", Москва 1977

[21] G. KÖTHE: Topologische Lineare Räume, Springer-Verlag Berlin, 1966

[22] М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, П. П. ЗАЙРЕЙКО: Геометрические методы нелинейного анализа, изд. "Наука", Москва 1975

[23] C. KURATOWSKI: Sur les espaces complets, Fund. Math. 15 (1930), 301-309

[24] J. LERAY: Théorie des points fixes, indice total et nombre de Lefschetz, Bull. S.M.F. 87 (1959), 221-233

[25] M. MARTELLI, A. VIGNOLI: Eigenvectors and surjectivity for α-Lipschitz mappings in Banach spaces, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 94 (1972), 1-9

[26] M. NAGUMO: Degree of mappings in convex linear topological spaces, Amer. J. Math. 73 (1951), 497-511

[27] R. D. NUSSBAUM: The fixed point index and fixed point theorems for k-set-contractions, Ph. D. Thesis, Univ. of Chicago, 1969

[28] R. D. NUSSBAUM: The fixed point index and aymptotic fixed point theorems for k-set-contractions, Bull. AMS 75 (1969), 490-495

[29] R. D. NUSSBAUM: Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps, Math. Ann. 191 (1971), 181-195

[30] R. D. NUSBAUM: The fixed point index for local condensing maps, Ann. Mat. Pura Appl. 89 (1971), 217-258

[31] R. D. NUSSBAUM: Some asymptotic fixed point theorems, Trans. AMS 171 (1972), 349-375

[32] R. D. NUSSBAUM: Degree theory for local condensing maps, J. Math. Anal. Appl. 37 (1972), 741-766

[33] R. D. NUSSBAUM: On the uniqueness of the topological degree for k-set-contractions, Math. Z. 137 (1974), 1-6

[34] R. D. NUSSBAUM: Generalizing the fixed point index, Math. Ann. 228 (1977), 259-278

[35] W. V. PETRYSHYN: Structure of the fixed points sets of k-set-contractions, Arch. Rat. Mech. Anal. 40 (1970/71), 312-328

[36] W. V. PETRYSHYN: Note on the structure of fixed points sets of 1-set-contractions, Proc. AMS 31 (1972), 189-194

[37] W. V. PETRYSHYN: Remarks on condensing and k-set-contractive mappings, J. Math. Anal. Appl. 39 (1972), 717-741

[38] W. V. PETRYSHYN: A new fixed point theorem and its applications, Bull. AMS 78 (1972), 225-229

[39] W. V. PETRYSHYN: Fixed point theorems for various classes of 1-set-contractive and 1-ball-contractive mappings in Banach spaces, Trans. AMS 182 (1973), 323-352

[40] W. V. PETRYSHYN: Generalization of Schaefers theorem to set-nonexpansive operators, Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A (1973), 889-891

[41] W. V. PETRYSHYN, P. M. FITZPATRICK: On 1-set- and 1-ball-contractions with applications to pertubation problems for nonlinear bijective maps and linear Fredholm maps, Boll. U.M.I. (4) 7 (1973), 102-124

[42] S. REICH: Fixed points of condensing functions, J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 460-467

[43] Б. Н. САДОВСКИЙ: О мерах некомпактности и уплотняющих операторах, Пробл. мат. анал. сложных систем, вып. 2, Воронеж (1968), 89-119

[44] Б. Н. САДОВСКИЙ: О локальной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Пробл. мат. анал. сложных систем, вып. 3, Воронеж(1968), 232-243

[45] Б. Н. САДОВСКИЙ: Несколько замечаний об уплотняющих операторах и мерах некомпактности, Труды матем. ф-та ВГУ, вып. 1, Воронеж (1970), 112-124

[46] Б. Н. САДОВСКИЙ: Применение топологических методов в теории периодических решений дифференциально-операторных уравнений нейтрального типа, ДАН СССР 200, 5 (1971), 1037-1040

[47] Б. Н. САДОВСКИЙ: Предельно компактные и уплотняющие операторы, УМН 27, 1 (1972), 81-146

[48] Б. Н. САДОВСКИЙ: Об одном принципе неподвижной точки, Функц. анализ 1, 2 (1967), 74-76

[49] C. A. STUART, J. F. TOLAND: The fixed point index of a linear k-set-contraction, J. London Math. Soc. (2) 6 (1973), 317-320

[50] J. W. THOMAS: A bifurcation theorem for k-set-contractions, Pac. J. Math. 44 (1973), 749-756

[51] J. W. THOMAS: The multiplicity of an operator is a special case of the topological degree for k-set-contractions, Duke Math. J. 40 (1973), 233-240

[52] Г. М. ВАЙНИККО, Б. Н. САДОВСКИЙ: О вращении уплотняющих векторных полей, Пробл. мат. анал. сложных систем, вып. 2, Воронеж (1968), 84-88

[53] A. VIGNOLI: On α-contractions and surjectivity, Boll. U.M.I. (4) 4 (1971), 446-455

[54] R. L. WEBB: Remarks on k-set-contractions, Boll. U.M.I. (4) 4 (1971), 614-629

[55] R. L. WEBB: On a characterisation of k-set-contractions, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 50 (1971), 686-689

[56] П. П. ЗАБРЕЙКО, И. Б. ЛЕДОВСКАЯ: Теоремы существования для уравнений в банаховом пространстве и принцип усреднения, Пробл. мат. анал. сложных систем, вып. 3, Воронеж (1968), 122-136

[57] E. ZEIDLER: Zur Eindeutigkeit von Fixpunktindizes für nichtkompakte Operatoren, Math. Nachr. 75 (1977), 51-85

LEBENSLAUF

Am 24. 5. 1952 wurde ich als Sohn des Rechtsanwalts und späteren Notars Wilhelm Appell und seiner Ehefrau Annegret Appell in Berlin geboren. Nach dem Besuch der 9. Grundschule Berlin wurde ich in die Sexta des Evangelischen Gymnasiums zum Grauen Kloster in Berlin aufgenommen, wo ich 1971 die Reifeprüfung ablegte.

Mit Beginn des Sommersemesters 1971 wurde ich in den Fachbereichen 19 (Mathematik) und 20 (Physik) der Freien Universität Berlin immatrikuliert; nach dem Vordiplom wählte ich statt Physik das Nebenfach Musikwissenschaft (Fachbereich 18). Im Sommersemester 1975 legte ich an der Freien Universität Berlin die Diplomprüfung in den Fächern Mathematik und Musikwissenschaft ab.

Von 1972 bis 1975 war ich Mitglied der Studienstiftung des Deutschen Volkes.

Vom Herbst 1975 bis zum Frühjahr 1976 studierte ich als Stipendiat des Deutschen Akademischen Austauschdienstes an den Staatlichen Universitäten Leningrad, Moskau, Voronež und Jaroslavl' (UdSSR). Nach meiner Rückkehr war ich als Lehrbeauftragter am Fachbereich Mathematik tätig, seit dem 1. 2. 1977 bin ich dort Wissenschaftlicher Assistent.

Berlin, im Frühjahr 1978

Jörg Appell